Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality

Robert J. Aumann

Econometrica, Vol.55, No.1, pp. 1-18, 1987

発表者:福山祥代

ベイズ理論

あるゲームにおいて,
あるプレイヤーが
ある戦略をとるという予想に基づいて
それが起こる確率を出すことができる

ゲーム理論

ある事象が起こる確率は
合理的な意思決定者ではなく
均衡に基づく

ベイス合理性の結果としての相関均衡

混合戦略のような,
個人の側でのランダム化が不要
各プレイヤーは純粋戦略をとればよく
他のプレイヤーから見た
各プレイヤーの行動の不確実性
によって, 戦略の確率的な性質が
表される

ナッシュ均衡

どのプレイヤーも、戦略を変えても利得を増やせないため
戦略を変える動機をもたない状態
（他のプレイヤーがとっている戦略に対して最適の戦略をとっている状態）

［疑問］ なぜ，またどのような条件下で，このような均衡状態になるのか？
どうやって他のプレイヤーがその戦略をとると予測できるのか？

何らかの理由で他のプレイヤーがとる戦略を
各プレイヤーが知っている場合に意味をなす

⟶ かなり限定的

本研究の目的

ベイズ理論を用いて，均衡に至る合理的な根拠を示す

↓

混合戦略均衡
ではなく

相関均衡

ナッシュ均衡での仮定

各プレイヤーは利得を最大化する行動をとる
各プレイヤーは他のすべてのプレイヤーの
戦略を知っている

本研究での仮定

各プレイヤーはベイズ理論に基づいて
利得最大化の行動をる
各プレイヤーは他の人の戦略は知らない

(i) 各プレイヤーは
すべての「世界の状態」に対して
主観的な確率分布をもっている

(ii) 各プレイヤーは
与えられた情報から予測できる利得を
最大化する戦略をとる，ということが
共有知識になっている

↓

各プレイヤーによって選択された戦略が
相関均衡を形成する

n人のプレイヤーによる
戦略型ゲームGについて，

$i = 1, \ldots, n$に対して

S^i ：純粋戦略（行動）の組

s^i ：n個の行動

$h^i(s)$ ：sに対するiの利得

Γ ：有限な確率空間

f ：均衡戦略を表す関数

相関戦略

correlated strategy

混合戦略と同様，ランダムな事象の観測に基づいて行動を選択するが，
混合戦略では観測が独立であるのに対し，相関戦略では独立でなくてもよい

偶然が確率空間Γの要素γを選択し，
各プレイヤーiに行動$f^i(\gamma)$をとるように提案する

単純な例：信号など

→ すべてのプレイヤーが提案に従えば，相関戦略が成立する

相関均衡

correlated equilibrium

定義2.1　戦略型ゲームGにおける相関均衡は，
各プレイヤーiについて，f^iの関数g^iに対して
式(2.2)を満たすような相関戦略(n組のf)である．

$$Eh^i(f) \geq Eh^i(f^{-i}, g^i) \qquad (2.2)$$

g^i: ΓからSへのfとは異なる関数

均衡は，他のプレイヤーがそれに従うとしたときに，
その提案から戦略を変えても利得が増えないとき，成立する

相関均衡分布の計算

ナッシュ均衡よりシンプル
線形の不等式で定義される凸多面体で表すことができる

2人ゲームの場合

$$l := |S^1|, m := |S^2|, h_{jk} := h(j,k) \text{ for } j \in S^1 \text{ and } k \in S^2$$

としたとき，相関戦略の確率分布はlm組のp_{jk}であり，

$$p_{jk} \geq 0 \text{ for all } j \text{ and } k, \text{ and } \sum_j \sum_k p_{jk} = 1$$

定理2.3　相関戦略の確率分布p_{jk}が式(2.4)を満たす場合のみ
相関均衡分布となる

$$\sum_k (h^1_{jk} - h^1_{qk}) p_{jk} \geq 0 \text{ for all } j,q \text{ in } S^1, \text{ and}$$
$$\sum_j (h^2_{jk} - h^2_{jr}) p_{jk} \geq 0 \text{ for all } k,r \text{ in } S^2 \qquad (2.4)$$

相関均衡分布の計算

証明　jがプレイヤー1にとって可能な提案である

$$\sum_k p_{jk} > 0$$

kがプレイヤー2に提案された場合の条件付き確率

$$p_{jk}/\sum_k p_{jk}$$

上記の場合の条件付き期待利得

$$\sum_k h^1_{jk} p_{jk}/\sum_k p_{jk} \quad \rightarrow \quad H^1(j|j)$$ とよぶ

プレイヤー1が行動をqに変えた場合の条件付き期待利得

$$\sum_k h^1_{qk} p_{jk}/\sum_k p_{jk} \quad \rightarrow \quad H^1(q|j)$$ とよぶ

※利得は変わるが情報は変わらない

式(2.2)からプレイヤー1にとってqに変えることは利得を上げないので

$$H^1(j|j) \geqslant H^1(q|j)$$

両辺を $\sum_j p_{jk}$ 倍して式(2.4)を得る　プレイヤー2についても同様

相関均衡の例

「チキンゲーム」

player1 \ player2		A	B
	A	6,6	2,7
	B	7,2	0,0

ペイオフマトリクス

1/3	1/3
1/3	0

相関均衡分布

戦略(A,A),(A,B),(B,A)の3つの戦略の
可能性があることがわかっていて，
戦略Bが提案された場合 → 戦略を変えない（利得7が得られるため）

戦略Aが提案された場合 →
- 戦略を変えない場合の利得
  6*1/2+2*1/2=4
- 戦略を変えた場合の利得
  7*1/2+0*1/2=3.5

→ 戦略を変えない

ゲームにおけるベイズ合理性

Bayesian rationality in games

(i) Ω:可能なすべての世界の状態とそれに属する要素ω:個々の状態

(ii) 各プレイヤーiについてのΩ上の事前確率p^i

(iii) 各プレイヤーiについてのΩの情報分割$\mathcal{P}^i$

本物の世界の状態をωとして，$\omega \in P \in \mathcal{P}^i$ とすると
iはPの要素をいくつか知っているがどれが本物かは知らない

「世界の状態」
ゲームGの各プレイヤーの不確実性の対象になっている
全てのパラメータの内訳
与えられたωに対しては全員が全てを知っているが
一般的にはどのωが本物かわからない

ゲームにおけるベイズ合理性

Bayesian rationality in games

Common Prior Assumption　を適用

すべての事前確率p^iは等しい

$\mathbf{s}(\omega) := (\mathbf{s}^i(\omega), \ldots, \mathbf{s}^n(\omega))$ を状態ωで選ばれるn個の行動の組とする

情報に基づき利得を最大化する行動をとるとき，
「プレイヤーiが状態ωでベイズ合理的である」と言う

主要定理

各プレイヤーが世界の各状態においてベイズ合理的であるならば，
n組の行動$\mathbf{s}$の分布は相関均衡分布となる

ゲームにおけるベイズ合理性

Bayesian rationality in games

Γ ： 確率空間

f ： $\Gamma \rightarrow S$を表す相関均衡の関数で$\mathbf{s}$と同じ分布をもつ

$\Gamma := (\Omega, p)$ としたとき，$\mathbf{s}$自身が関数fに該当

$g^i : \Omega \rightarrow S^i$を，$\mathbf{s}^i$の関数とする

$\mathbf{s}^i$が$\mathcal{P}^i$ に照らして計測可能であることから，g^iも同様

$\rightarrow$ $\mathcal{P}^i$ 内の各Pに対して定数である

証明　プレイヤーiが各状態でベイズ合理的であれば，

$$E(h^i(\mathbf{s}) \mid P) \geq E(h^i(\mathbf{s}^{-i}, s^i) \mid P)$$

Pにおいてs^iがg^iに対して一定であることを考慮すると，

$$E(h^i(\mathbf{s}) \mid P) \geq E(h^i(\mathbf{s}^{-i}, g^i) \mid P)$$

両辺をP倍して，$\mathcal{P}^i$内のすべてのPについて和をとると，

$$E(h^i(\mathbf{s})) \geq E(h^i(\mathbf{s}^{-i}, g^i))$$

f=$\mathbf{s}$なので，(2.2)式に一致し相関均衡である.

discussion

randomness as an expression of ignorance

プレイヤーが行動をランダム化する必要があるのは他のプレイヤーが
戦略を変えるのを抑止するためであって，自分のためには必要ない

■混合戦略均衡の場合

各プレイヤーは自分のとる行動を知っているが，
1/2-1/2の確率で相手の行動によって決まるものとしており，
また相手の行動も自分の行動によって確率的に決まる

各プレイヤーがどのように行動するかがすべて共有知識になっている
ような状態

⟶ かなり特殊で不自然

■相関均衡の場合

他のプレイヤーがどのように行動すると考えるかは各プレイヤーの自由
各プレイヤーが他のプレイヤーの行動をどのように予測しているかを
他のプレイヤーは知らない

例：3人のゲーム

player1　:行，　player2　:列，　player3　:行列　を選択

0,0,3	0,0,0
1,0,0	0,0,0

2,2,2	0,0,0
0,0,0	2,2,2

0,0,0	0,0,0
0,1,0	0,0,3

player1と2は同じビジネススクールに通っている

player3はそれが何を意味するのかを知らない

player3はplayer1と2が同じような行動をとると予想するが，それが何の行動かはわからない

(2,2,2）が相関均衡となる

player3は中央の行列を選択し，player1と2は1/2ずつの確率で左上か右下を選択

player3がplayer1と2がどのような行動をとるかを知らないが，2人が同じような行動をとると考えている，ということが共有知識となっていることの結果として生じる

discussion

personal choice as a state variable

通常のベイズ理論では，

どんな情報を受け取った場合でも
意思決定者は自分が望むどんな選択をしてもよい

本研究のモデルでは，

各意思決定者の選択は，世界の状態の中の一部分としてなされる
ωという状態が与えられたとき，
意思決定者はωから通告される選択を強いられるように見える

↓

「外部の観察者」から見た状態だと考える

外部の観察者は，各プレイヤーが何を選択するかを事前には知らない
外部の観察者にとって，各プレイヤーの選択は世界の状態の一部分である
各プレイヤーが好きなものを選べないということではなく，
観察者が彼らの好きなものを知らないだけ

common knowledge of information partitions and priors

分割$\mathcal{P}^i$そのものは全てのプレイヤーの共有知識

それぞれのωが世界の状態の完全な記述を含んでいる場合，
プレイヤー2にとってωと区別のつかないω'のリストも含んでいる

他のプレイヤーがこのリストに対して不確実性をもっていると，
ωは定義どおりのものにならない

プレイヤー2にとって区別のつかないような状態のピースに
ωを分割する必要がある

$\mathcal{P}^i$の構造に対するωの表現そのもの

ωはコードブックや辞書のようなもの
$\mathcal{P}^i$は辞書の様々な分類方法のようなもの

事前確率$p^i(\omega)$も同様に全てのプレイヤーの共有知識

$p^i(\omega)$ が共有知識でない場合，Piの場合と同様に，ωは定義と異なることになる
$p^i(\omega)$ の確率に応じてωを分割する必要がある

the converse

Ω, p, $\mathcal{P}^i$, sを情報システムと呼ぶことにする

主題により，ベイズ合理性のもとでは，
すべての情報システムは相関均衡に一致する

この逆も成り立つ

ベイズ合理性のもとでは，すべての相関均衡はある情報システムに一致する

各ゲームGとGの相関均衡fについて，各プレイヤーにとってsに従って
行動することがベイズ合理的であり，かつ結果の分布がfに一致する
情報システムが存在する

Mixed strategies

プレイヤーが混合戦略をとりたい場合，各プレイヤーが自分のとる行動を知っているという仮定は成り立つのか？

通常は，決断を助けるための方法であって最終的には決断している

しかし，プレイヤーが自分自身に対して，混合戦略を適用した場合は？

このこと自体を一つの行動（Siの要素）と考える