The Downs–Thomson Paradox with responsive transit service

Fangni Zhang, Hai Yang , Wei Liu

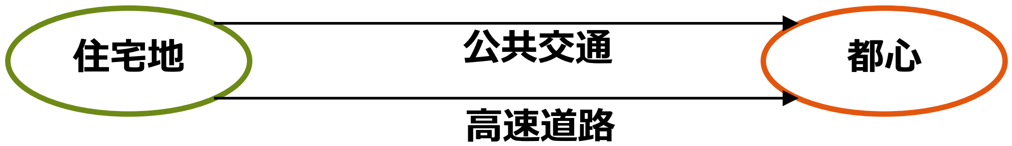
Transportation Research Part A 70 (2014) 244–263

BinN　理論談話会
2015/6/11

藤垣洋平

Downs-Thomson Paradox とは

郊外住宅地と都心部の間を、公共交通と高速道路が結んでいると想定



■通勤時間帯について考える
■通勤者は一般化費用（所要時間と料金）を考慮して選択する
■公共交通事業者は利用者数に応じて反応的にサービス水準を調整

【Downs-Thomson Paradox】
以上の仮定のもとでは、高速道路側の交通容量を増やすほど、
平均一般化費用が増加する（不便になる）

（理由の直感的説明）
高速道路の容量が増加すると、道路側に利用者が流れることで公共交通利用者が減る
→公共交通事業者が本数を減らすor料金を上げる
→均衡状態では、不便になった公共交通と同じ程度の一般化費用になるまで道路側も混雑

今回紹介する論文では、公共交通事業者の戦略を変えながらParadox発生有無を検討

目次

1. Introduction

2. Model Formulation （定式化）

3. Paradox conditions with responsive transit service
（パラドックス発生条件についての証明）

4. An illustrative Example（計算例）

5. Conclusion

1. Introduction

The Downs-Thomson Paradoxについては今までいくつもの研究がなされてきているが…

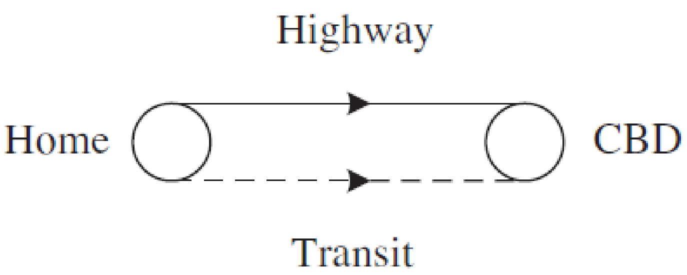
公共交通事業者の取る戦略（目的関数）による、パラドックス発生の有無については明らかになっていない

運賃や運行頻度を調整する際の交通事業者の方針を変えながらパラドックス発生の有無について考察する

対象とする公共交通事業者の戦略：Profit Maximizing, Zero Profit

2. Model Formulation

空間の仮定



全体の需要 : d　　高速道路の交通量 : v
高速道路の交通容量 : c

一般化費用（travel cost）

Transit:

$$p_t = \beta[w(\underbrace{\boxed{f}}_{\text{運行頻度}}) + \overbrace{\boxed{t_t}}^{\text{所要時間}}] + \underbrace{\boxed{\tau_t}}_{\text{金銭的コスト(Transit)}}$$

Highway:

$$p_a = \beta \underbrace{\boxed{t_a(v,c)}}_{\text{所要時間}} + \underbrace{\boxed{\tau_a}}_{\text{金銭的コスト(Highway)}}$$

仮定(interior equilibrium)

全員が高速道路を利用していたら公共交通の方が一般化費用は安くなり

$$t_a(d,c) + \tau_a/\beta > w(f) + t_t + \tau_t/\beta$$

全員が公共交通を利用していたら高速道路の方が一般化費用が安くなる

$$t_a(0,c) + \tau_a/\beta < w(f) + t_t + \tau_t/\beta.$$

2. Model Formulation

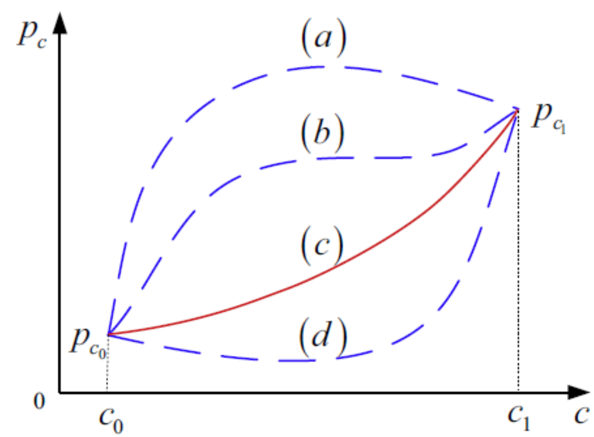
均衡状態　$p_c = p_t = p_a,$ i.e., $p_c = \beta[w(f) + t_t] + \tau_t = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$

パラドックス発生の一般的な定義

The Downs-Thomson Paradox が $c = c_0$ において生じていることは、以下のようなc_1が存在することと同値

$$p_{c_0} < p_{c_1}, \text{ with } c_0 < c_1.$$

しかしこの定義では連続的なパラドックス発生の有無を考慮していない（右図のa, b, c, d いずれも上記の定義を満たすが、微小量の変化に対してパラドックスが発生しない区間が$[c_0, c_1]$に含まれる）



連続的なパラドックス発生の定義
（以降はこちらを使用）

$$\left.\frac{dp_c}{dc}\right|_{c=c_0} > 0.$$

3. Paradox conditions with responsive transit service

変更方針と変更可能な変数が異なる6通りを考える

A. 利益最大化を行う事業者

A.1 運賃・運行頻度共に可変の場合
A.2 運行頻度のみ可変の場合
A.3 運賃のみ可変の場合

B. 利益ゼロで利用者の移動費用が最小となるよう調整する事業者

B.1 運賃・運行頻度共に可変の場合
B.2 運行頻度のみ可変の場合
B.3 運賃のみ可変の場合

A.1 利益最大化・運賃運行頻度とも可変

公共交通事業者は以下の最適化問題を解いて運賃と運行頻度を決める

$$\max_{f,\tau_t} \ \pi = \tau_t(d - v) - k(f),$$

利益最大化

subject to

$$\beta[w(f) + t_t] + \tau_t = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$$

利用者均衡

定理

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益最大化を行う公共交通事業者が連続的に運賃と運行頻度を調整することで対応した場合には、

(i) 個人の travel cost は単調減少しDowns-Thomonパラドックスは生じない
(ii) 公共交通事業者の利益は単調減少する

証明の準備

$w' = \frac{\partial w}{\partial f},\ t'_v = \frac{\partial t_a}{\partial v},\ t'_c = \frac{\partial t_a}{\partial c},\ \ k' = \frac{\partial k}{\partial f}$ とおく

$\beta[w(f) + t_t] + \tau_t = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$ の両辺を微分することで、
次のような関係が得られる

$$\frac{\partial v}{\partial f} = \frac{w'}{t'_v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_t} = \frac{1}{\beta t'_v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial c} = -\frac{t'_c}{t'_v}$$

証明

$$w' = \frac{\partial w}{\partial f},\ t_v' = \frac{\partial t_a}{\partial v},\ t_c' = \frac{\partial t_a}{\partial c},\ k' = \frac{\partial k}{\partial f}$$

$\max_{f,\tau_t} \pi = \tau_t(d-v) - k(f)$, について1階、2階の条件は以下の通り

$$\text{FOC}:\ f^*: \tau_t w' + t_v' k' = 0,$$
$$\tau_t^*: \beta t_v'[d - v(f,\tau_t,c)] - \tau_t = 0$$

$$\frac{d\tau_t^*}{dc} = \frac{\beta^2 w'^2 t_c' (2\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')}{(2\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')(\tau_t w'' + k'' t_v') - \beta^2 w'^2 t_v'^2}, \quad (1)$$

$$\frac{df^*}{dc} = \frac{-\beta w' t_c' (\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')}{(2\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')(\tau_t w'' + k'' t_v') - \beta^2 w'^2 t_v'^2}. \quad (2)$$

$$\text{SOC}:\ \pi'' = \begin{pmatrix} \pi''_{ff} & \pi''_{f\tau_t} \\ \pi''_{f\tau_t} & \pi''_{\tau_t\tau_t} \end{pmatrix} \leqslant 0$$

$$\pi''_{ff} = \frac{-\tau_t w'' t_v'^2 + \tau_t w'^2 t_v'' - k'' t_v'^3}{t_v'^3} \leqslant 0,$$
$$\pi''_{\tau_t\tau_t} = \frac{\tau_t t_v'' - 2\beta t_v'^2}{\beta^2 t_v'^3} \leqslant 0,$$
$$\pi''_{ff}\pi''_{\tau_t\tau_t} - \pi''^2_{f\tau_t} = \frac{(2\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')(\tau_t w'' + k'' t_v') - \beta^2 t_v'^2 w'^2}{\beta^2 t_v'^4} \geqslant 0. \quad (3)$$

$$\boxed{\frac{dp_c^*}{dc}} = \frac{d\tau_t^*}{dc} + \beta w'(f^*)\frac{df^*}{dc} = \frac{\beta^3 w'^2 t_v'^2 t_c'}{(2\beta t_v'^2 - \tau_t t_v'')(\tau_t w'' + k'' t_v') - \beta^2 w'^2 t_v'^2} < 0,$$

(1)(2)より

(3)より

高速道路容量微増時の移動費用
（正であればパラドックス発生と定義）

$$\boxed{p_t = \beta[w(f) + t_t] + \tau_t}$$

A.2 利益最大化・運行頻度のみ可変

公共交通事業者は、運賃は変更できないものとする
その上で、以下の最適化問題を解いて運行頻度を決める

$$\max_{f} \ \pi = \tau_t^0(d - v) - k(f),$$

subject to

$$\beta[w(f) + t_t] + \tau_t^0 = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$$

定理

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益最大化を行う公共交通事業者が連続的に運行頻度を調整することで対応した場合には、

(i)　最適な運行頻度は単調増加する
(ii)　個人の travel cost は単調減少しDowns-Thomonパラドックスは生じない
(iii)　公共交通事業者の利益は単調減少する

A.3 利益最大化・運賃のみ可変

公共交通事業者は、運行頻度は変更できないものとする
その上で、以下の最適化問題を解いて運賃を決める

$$\max_{\tau_t} \ \pi = \tau_t(d - v) - k(f_0),$$

subject to

$$\beta[w(f_0) + t_t] + \tau_t = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$$

定理

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益最大化を行う公共交通事業者が連続的に運賃を調整することで対応した場合には、

(i)　最適な運賃は単調減少する
(ii)　個人の travel cost は単調減少しDowns-Thomonパラドックスは生じない
(iii)　公共交通事業者の利益は単調減少する

B.1 利益ゼロ・運賃運行頻度とも可変

公共交通事業者は以下の最適化問題を解いて運賃と運行頻度を決める

$$\min_{f,\tau_t} p_c = \tau_t + \beta[w(f) + t_t],$$

利用者の一般化費用最小化

subject to

$$\tau_t(d - v) - k(f) = 0,$$

利益ゼロ

$$\beta[w(f) + t_t] + \tau_t = \beta t_a(v, c) + \tau_a.$$

利用者均衡

定理

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益ゼロで利用者の一般化費用を最小化する公共交通事業者が連続的に運賃と運行頻度を調整することで対応した場合には、

高速道路の容量の増加に伴いDowns-Thomsonパラドックスが必ず発生する

B.2 利益ゼロ・運行頻度のみ可変

公共交通事業者は、運賃は変更できないものとする
利益をゼロに保つ場合、以下の式を満たす必要がある

$$\pi = \tau_t^0[d - v(f,c)] - k(f) = 0$$

定理

$$I_1(c) = k' - \tau_t^0 \cdot \partial(d - v)/\partial f$$ と置く

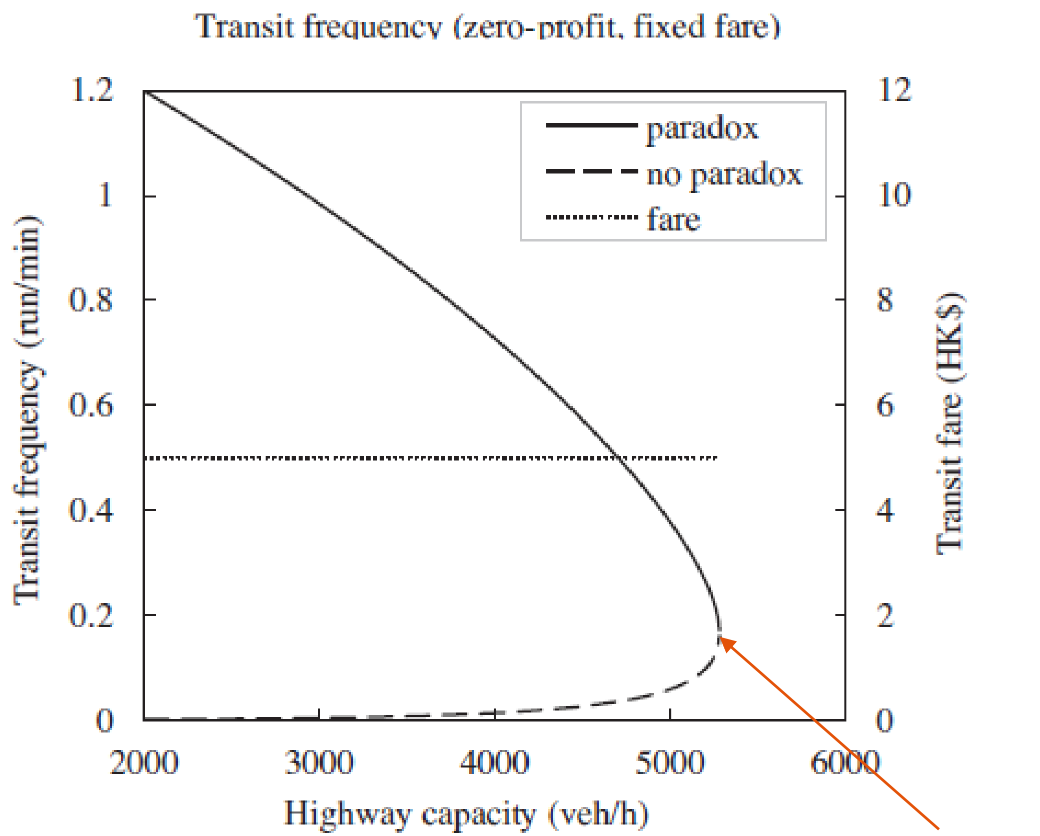
$* \; k' = \frac{\partial k}{\partial f}$ であり、$I_1(c)$ は限界費用と限界収入の差と捉えることができる

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益ゼロで利用者の一般化費用を最小化する公共交通事業者が連続的に運賃を調整することで対応した場合には、

(i) $I_1(c) > 0$ とDowns-Thomonパラドックスが生じることは同値
(ii) c_0において$I_1(c_0) > 0$であった場合、$I_1(c)$はc について単調減少し、$I_1(c) = 0$ の解である$\hat{c}$について、$[c_0, \hat{c}]$ の区間でのみパラドックスが発生する
(iii) 公共交通事業者が頻度を最大化し利用者の移動費用を最小化する場合には、 Downs-Thomonパラドックスが生じる

計算例を用いた説明

- 実線、点線共に $\pi = \tau_t^0[d - v(f,c)] - k(f) = 0$ を満たす
- $I_1(c) > 0$ である実線部ではパラドックスが発生する



(a)

B.3 利益ゼロ・運賃のみ可変

公共交通事業者は、運賃は変更できないものとする
利益をゼロに保つ場合、以下の式を満たす必要がある

$$\pi = \tau_t[d - v(\tau_t, c)] - k(f_0) = 0$$

定理

$I_2(c) = (d - v) + \tau_t \cdot \partial(d - v)/\partial\tau_t$ と置く

$*\, I_2$は、τ_tを微少量変化させたときの収入の変化量 $\frac{\partial}{\partial\tau_t}(\tau_t(d - v))$

高速道路の容量の連続的な変化に対して、利益ゼロで利用者の一般化費用を最小化する公共交通事業者が連続的に運賃を調整することで対応した場合には、

(i) $I_2(c) > 0$ とDowns-Thomonパラドックスが生じることは同値
(ii) c_0において$I_2(c_0) > 0$であった場合、$I_2(c)$はcについて単調減少し、$I_2(c) = 0$の解である$\hat{c}$について、$[c_0, \hat{c}]$の区間でのみパラドックスが発生する
(iii) 公共交通事業者が運賃を最小化し利用者の移動費用を最小化する場合には、 Downs-Thomonパラドックスが生じる

4. An Illustrative Example

関数形を以下のように具体的に設定

Function	Specification
Highway travel time function	$t_a(v/c) = t_0 \cdot [1 + t_1 (v/c)^{\alpha}]$
Transit operation cost function	$k(f) = k_2 f^2 + k_1 f + k_0$
Transit waiting time function	$w(f) = 1/(2f)$

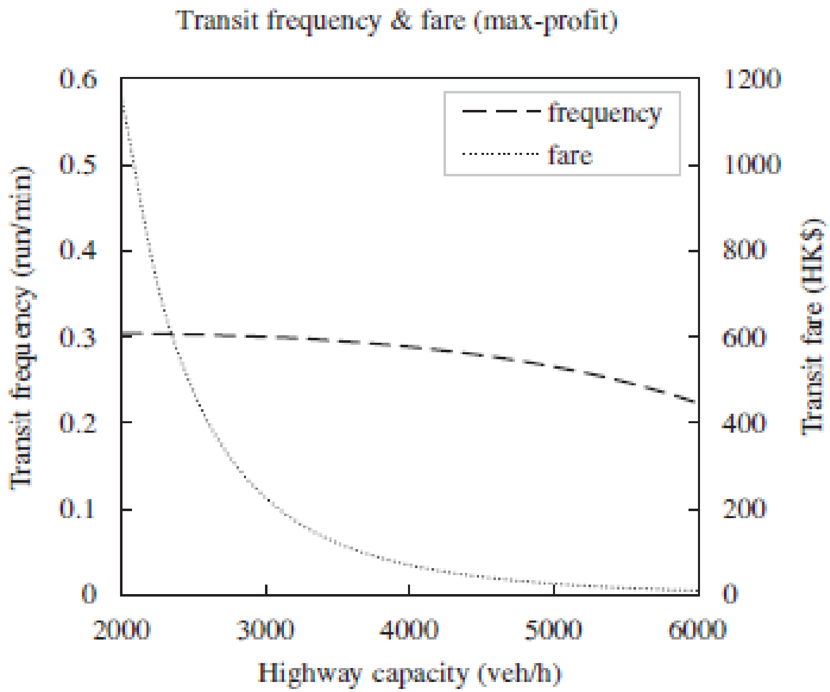
パラメータも以下のように設定

Value of parameter (quantity of one hour).

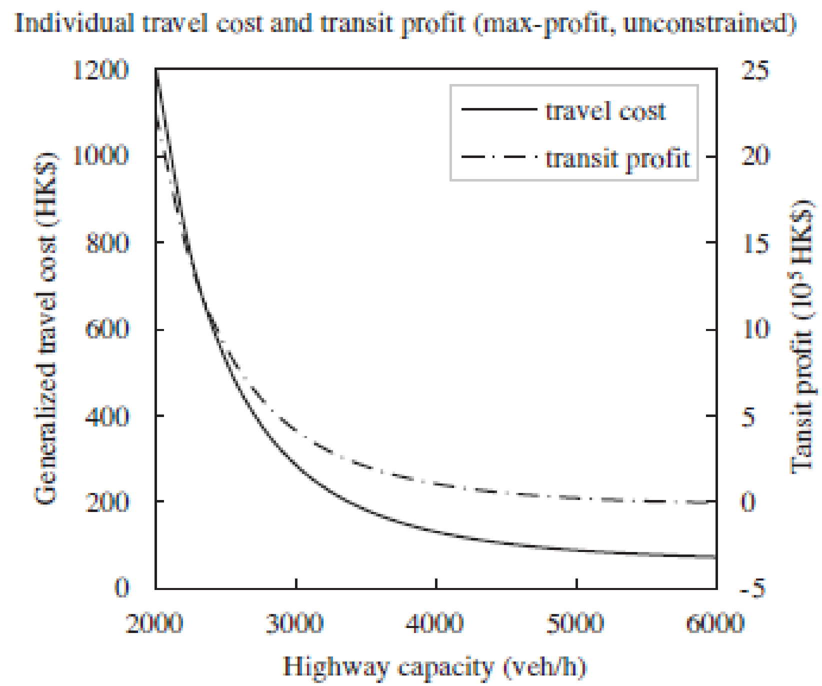
Parameter	Value
Total demand	$d = 10,000$ (person)
Value of time	$\beta = 1.5$ (HK$/min)
In-vehicle travel time of transit	$t_t = 40$ (min)
Monetary cost by auto	$\tau_a = 30$ (HK$)
Original highway capacity	$c_0 = 2000$ (vehicle/h)
Fixed fare (in the cases of constrained scheduling scheme)	$\tau_t^0 = 5$ (HK$)
Fixed frequency (in the cases of constrained pricing scheme)	$f_0 = 0.5$ (run/min)
Coefficients in operation cost function	$k_0 = 10,000$ (HK$)
	$k_1 = 10,000$ (HK$/run)
	$k_2 = 10,000$ (HK$/run^2)
Coefficients in highway travel time function	$t_0 = 10$ (min)
	$t_1 = 0.15$
	$\alpha = 4$

4. An Illustrative Example

利益最大化・運賃・運行頻度可変の場合



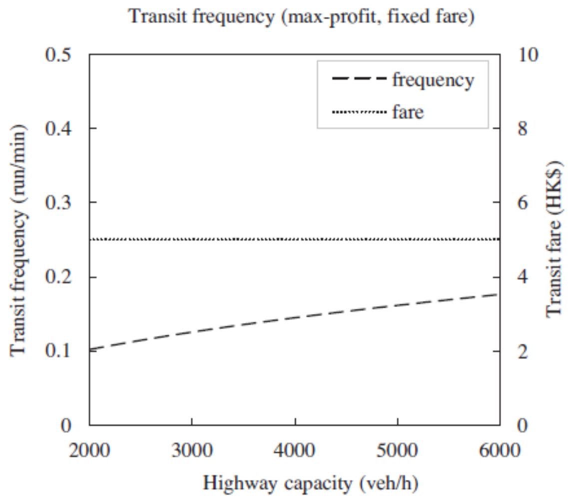
(a)



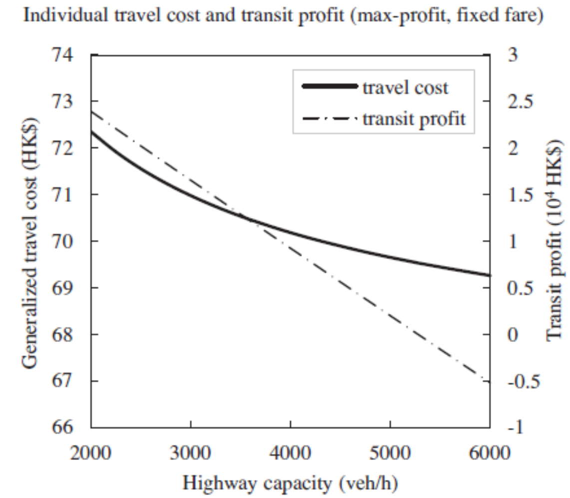
(b)

4. An Illustrative Example

利益最大化
運賃固定

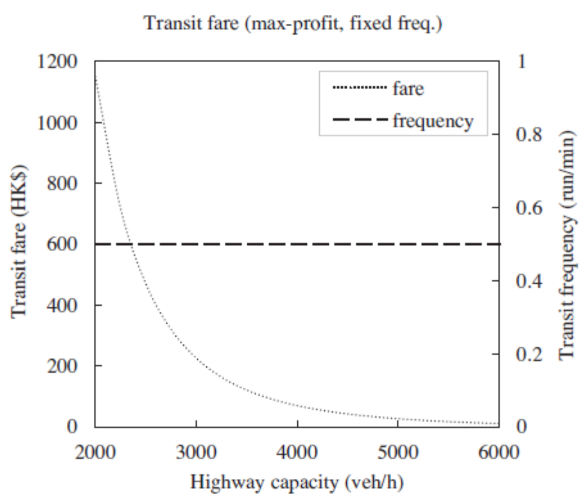


(a)

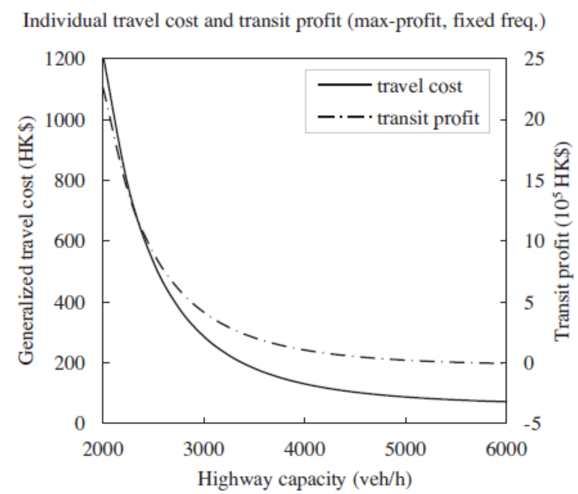


(b)

利益最大化
運行頻度固定



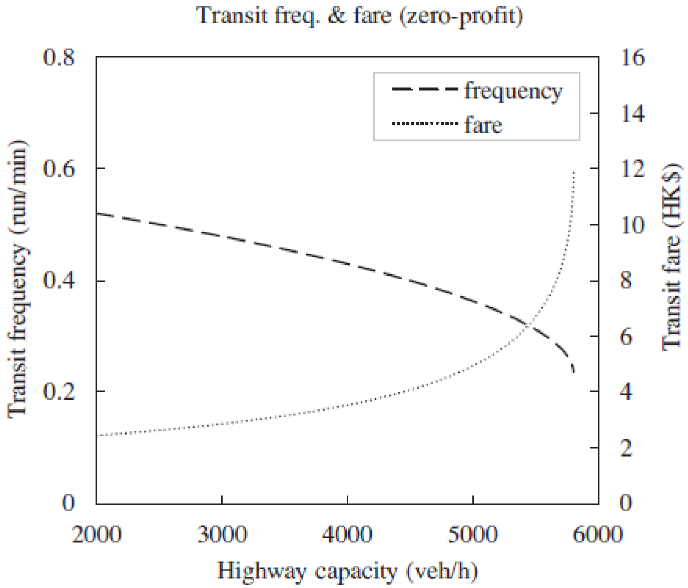
(a)



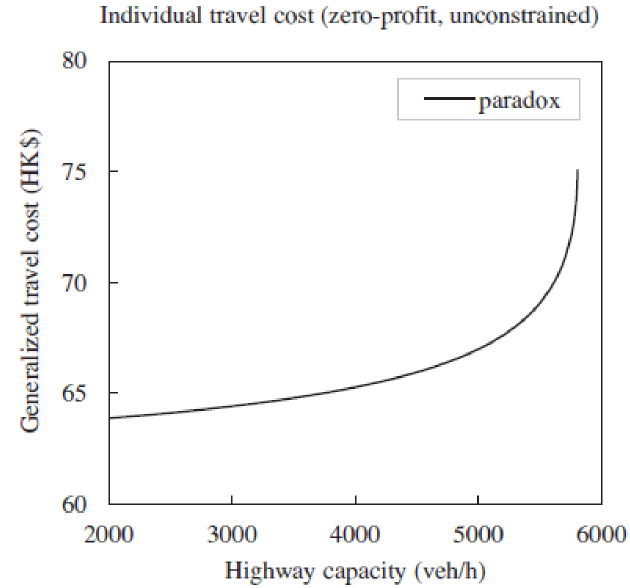
(b)

4. An Illustrative Example

利益ゼロ・利用者の一般化費用最小化の場合

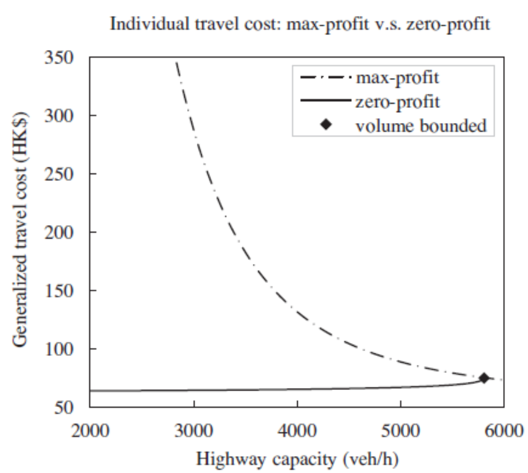


(a)



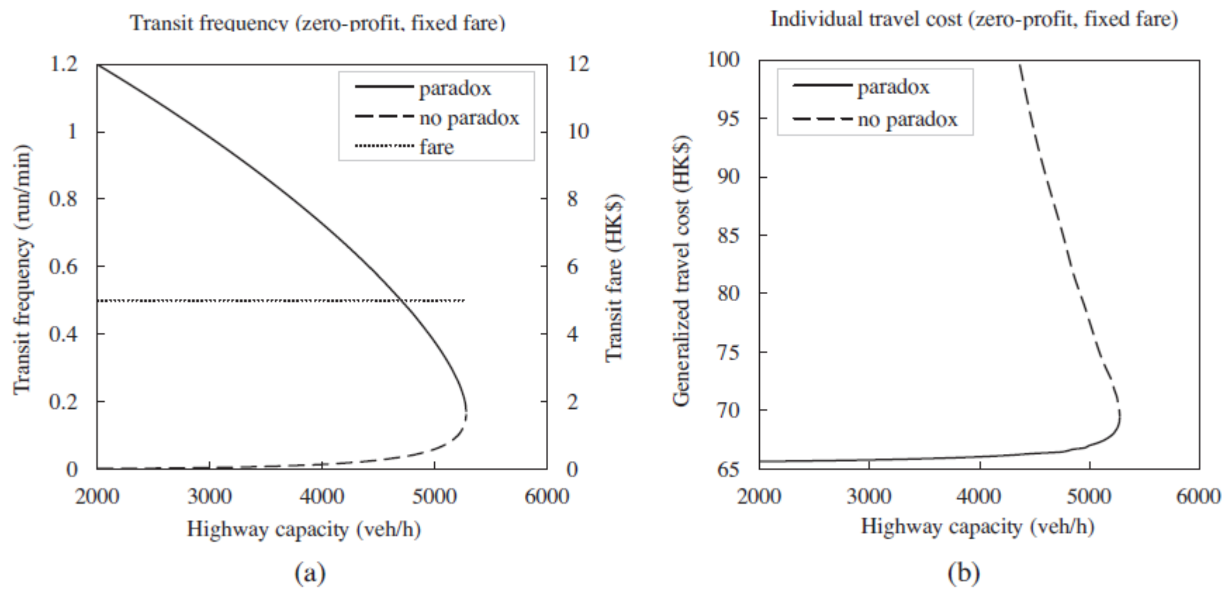
(b)

利益最大化と利益ゼロの場合の一般化費用の比較
→終盤まで利益ゼロの方が利用者の一般化費用は小さい

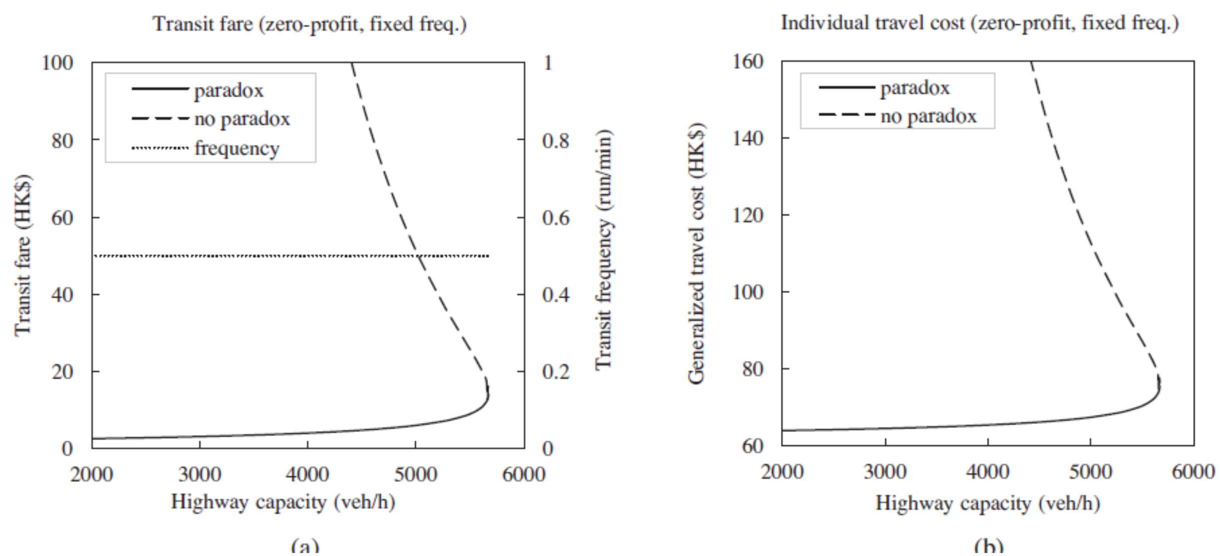


4. An Illustrative Example

利益ゼロ
運賃固定



利益ゼロ
運行頻度固定



5. Conclusion

公共交通事業者の戦略による The Downs-Thomson Paradoxの発生有無を検証し、数値計算例を示した

- 利益最大化を行う公共交通事業者の場合には、運賃設定・運行頻度設定の一方に制約がある場合でもない場合でも、The Downs-Thomson Paradoxは発生しない

- 利益ゼロを保ちながら、利用者の移動にかかる一般化費用を最小化するような公共交通事業者の場合には、 The Downs-Thomson Paradoxが発生する

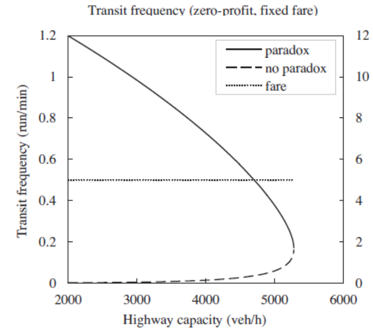
発表者から

■ 逆 Downs-Thomson Paradox:

・車線を減少させるBRT整備
　→全旅行者の一般化費用を上げるか下げるか？
・公共交通事業者を誘導する補助制度設計を考える材料になる可能性

■ 容量c を運転に対する心理的抵抗と捉える
→高齢化はcを減じる
　→逆 Downs-Thomson Paradoxは起こるか

・利益ゼロ点で良いと思ってしまう補助制度になっていると、
Paradoxは生じずに不便になってしまう



(a)