都市変容の確率過程

社会基盤学科　交通研究室4年　前田翠

2

目的

- **ミクロレベル**

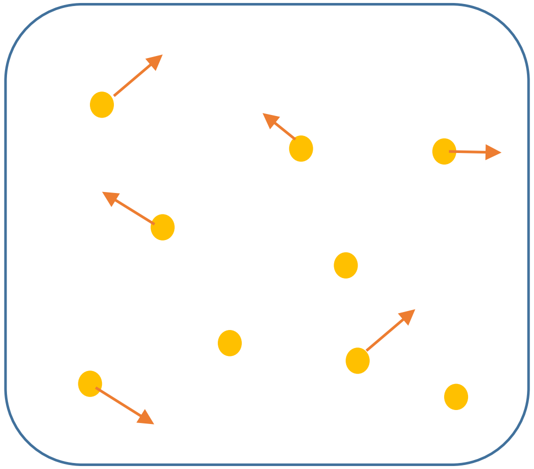
都市住民は自分の利益を最大化するように

自分の敷地の用途を決定する

（効用最大化）

長時間後

都市全体



都市の安定とは…?
ミクロの小さな動きはあるが
都市全体として見たときに
（統計的性質など）変化が
少ない状態

- **マクロレベル**

都市全体に関する統計的性質が現れる

（e.g. 各土地利用の用途の割合etc.）

→ ・ミクロレベルとマクロレベルがどのように関係しているのか
・日々状況が変化し続けている中での、都市全体としての安定とは
どのような状態なのか
これらを定式化して考えていきたい

概要

- **ミクロレベル**

都市住民は自分の利益を最大化するように
自分の敷地の用途を決定する
（効用最大化）

・**マクロレベル**

都市全体に関する統計的性質が現れる
（e.g. 各土地利用の用途の割合etc.）

解釈

- **ミクロレベル**

都市住民の敷地用途決定プロセスを定式化
（個人の効用最大化による選択行動）

- **マクロレベル**

都市全体の土地利用パターンの変化の様子を
確率論的に記述
（都市の安定＝確率的安定均衡状態）

手法

土地利用の遷移はマルコフ過程であると仮定.
（土地利用変化の直前の一時点の状態のみに影響される）

＜流れ＞
①ミクロの個人の効用最大化土地利用選択行動を記述
②E関数の導入（詳しくは後述）
③E関数が①とどの様に関係しているかを把握
④都市の確率的安定均衡状態

目次

前半

後半

目次

おまけ（時間があれば）

F関数の検証

都市変容の確率過程
—個人の自由選択による都市秩序形成
青木 義次(著)

1.個人の土地利用用途選択行動

1-1.個人の土地利用用途選択行動の設定

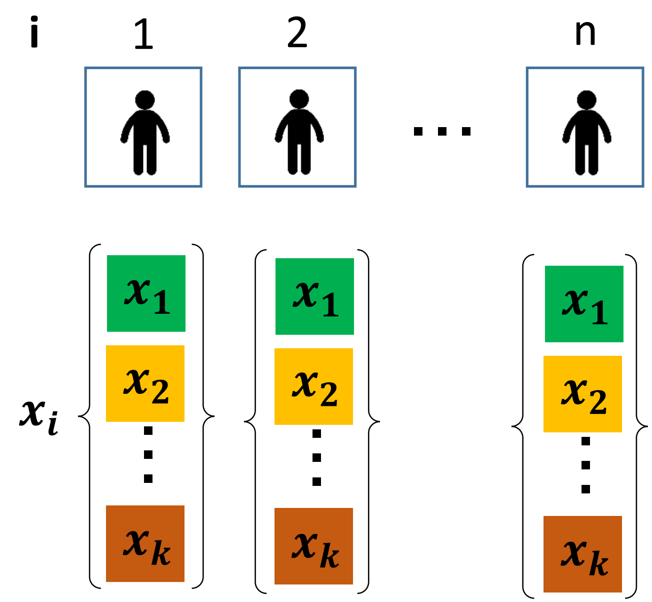
1-2.効用確定項

1-3.効用確定項の性質

1-1.個人の土地利用用途選択行動

文字の定義

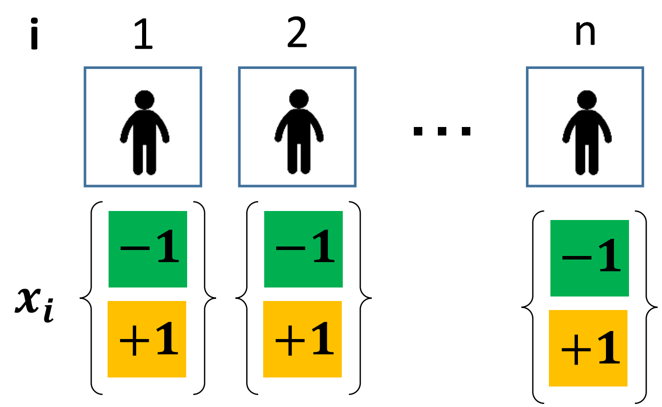
- 都市内の敷地の集合N：**1,2,…,n**
  （その敷地を所有している個人/世帯の集合）
- 各敷地：**i = 1,2,…,n**
- 各敷地 i での土地利用状態：$\boldsymbol{x_i}$=**{**$\boldsymbol{x_1, x_2,…,x_k}$**}**
  (土地利用形態がk種類ある場合)



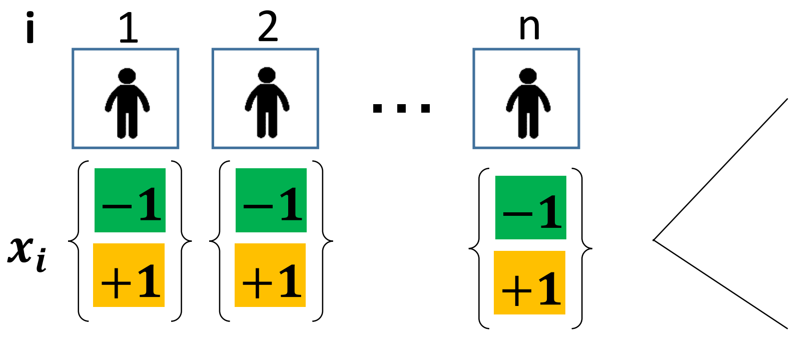
土地利用形態がk種類ある場合をいきなり扱うのは難しいので

$$k = 2, x_i=\{-1,+1\}$$

として土地利用用途+1と土地利用用途-1の場合について考える



1-1.個人の土地利用用途選択行動



個人iが土地利用+1を選択した時の効用
（土地iにて土地利用+1が選択された時の効用）

$$U_i^+ = d_i^+(x) + \varepsilon$$

個人iが土地利用-1を選択した時の効用
（土地iにて土地利用-1が選択された時の効用）

$$U_i^- = d_i^-(x) + \varepsilon$$

U_i：効用　d_i：確定項

εにガンベル分布を仮定することで、

個人iが土地利用+1を選択する確率

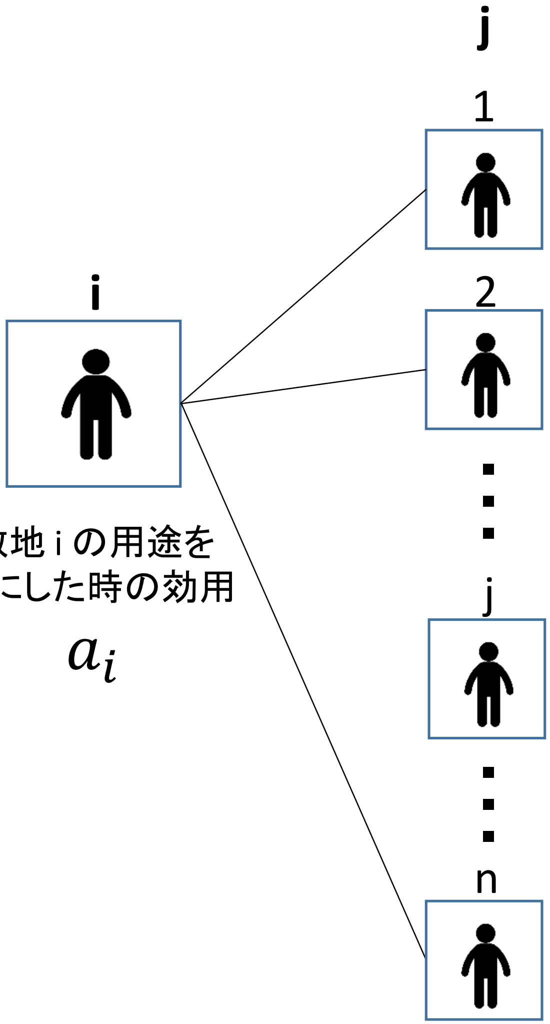
$$Prob[U_i^+ > U_i^-] = \frac{1}{1 + \exp(d_i^-(x) - d_i^+(x))} = \frac{\exp\left(d_i^+(x)\right)}{\exp(d_i^+(x)) + \exp(d_i^-(x))}$$

個人iが土地利用-1を選択する確率

$$Prob[U_i^- > U_i^+] = \frac{1}{1+\exp(d_i^+(x) - d_i^-(x))}$$

1-2.個人の土地利用用途選択行動-効用確定項-

効用確定項



敷地ｉの用途を
+1にした時の効用

a_i

敷地ｉの用途が+1の場合の個人ｉの効用

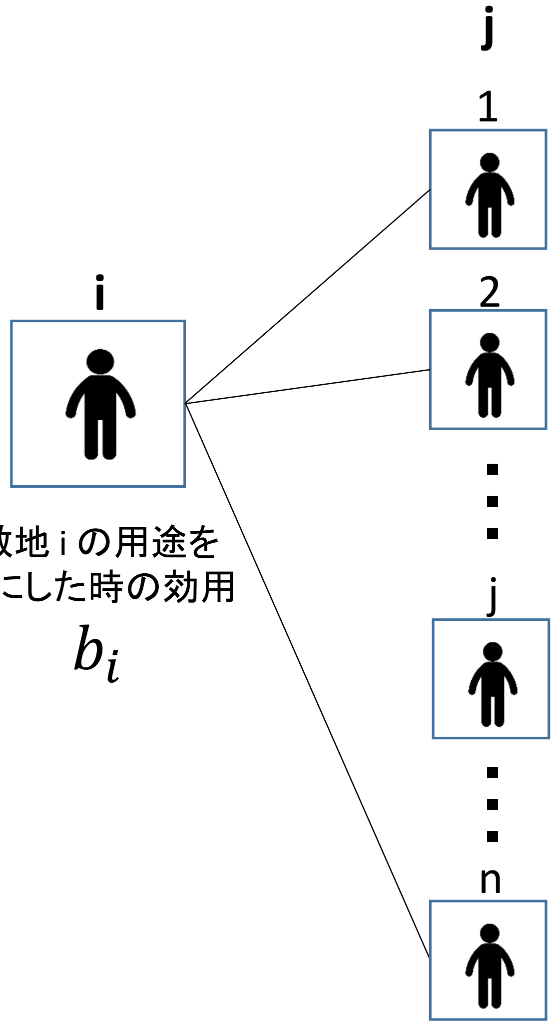
$$d_i^+(x) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

敷地jの土地利用x_jと敷地ｉの土地利用の
関係によりもたらされる効用

$a_{ij} x_j$

敷地ｉの土地利用と敷地ｊの土地利用x_jの
相性の良し悪し/影響の大きさは
パラメータa_{ij}が表す

1-2.個人の土地利用用途選択行動-効用確定項-



敷地ｉの用途を
-1にした時の効用

b_i

敷地ｉの用途が-1の場合の個人ｉの効用

$$d_i^-(x) = b_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$$

敷地jの土地利用x_jと敷地ｉの土地利用の
関係によりもたらされる効用

$b_{ij} x_j$

敷地ｉの土地利用と敷地ｊの土地利用x_jの
相性の良し悪し/影響の大きさは
パラメータb_{ij}が表す

1-3.個人の選択行動-効用確定項の性質(線形対称性) -

効用確定項の性質

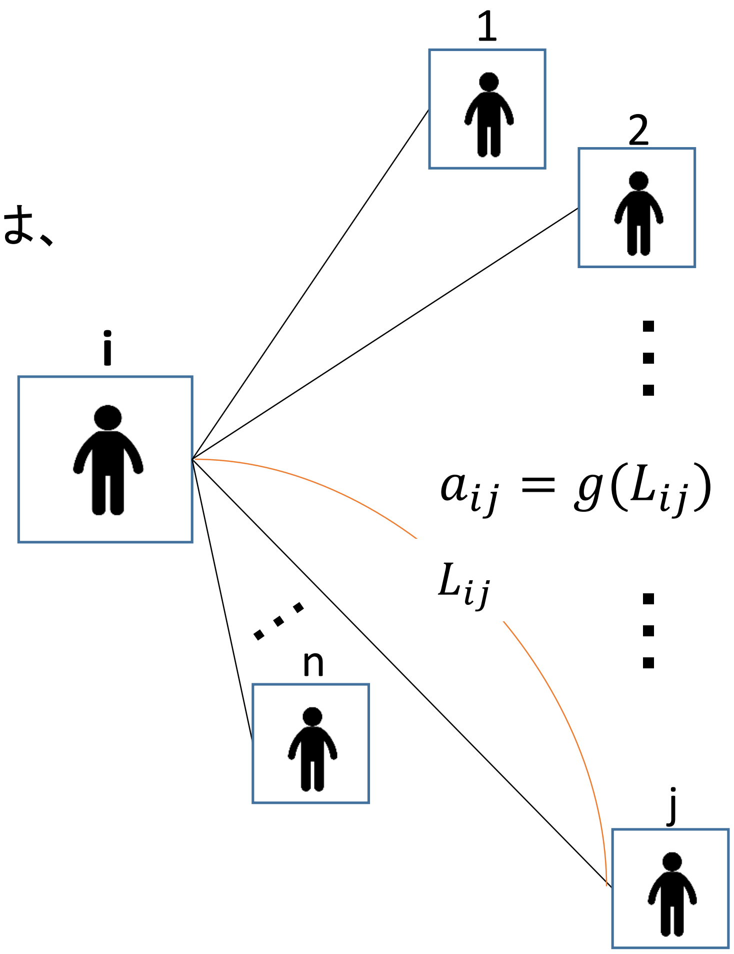
●線形対称性

一般に、地点 j からの i への影響の度合いa_{ij}, b_{ij}は、
地点 j からの i への距離L_{ij}(=L_{ji})の関数となる.

$$a_{ij} = g(L_{ij})$$
$$b_{ij} = h\left(L_{ij}\right)$$

ここで、 $L_{ij} = L_{ji}$より、$a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$

上記の性質が成り立つとき、効用関数は
「(**線形**)**対称性**」を有する

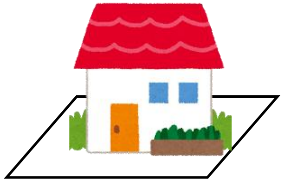


1-3.個人の選択行動-効用確定項の性質(強外部性) -

●強外部性

地点ｉの状態がダイナミックに変化する場合、
(e.g.　突然敷地ｉの周囲が商業開発される)
周囲の地点の状態の影響の方が圧倒的に
敷地ｉの用途により得られる効用より大きい

地点i自身からの影響
$a_{ii} = 0, b_{ii} = 0$とみなすことが出来る



上記の性質が成り立つとき、効用関数は
「**強外部性**」を有する

2.E関数とE−エントロピー，F関数

2-1.E関数

・E関数の定義

・E関数の性質

・E関数の感覚的理解

・E関数の利用

2-2.E-エントロピーの導入

2-3.F関数について

2-4.前半のまとめ

2-1.E関数-E関数の定義-

●E関数の定義

都市状態xの集合から実数への写像で、以下の性質を満足する関数をE関数と定義する.

$$E(x[i]) - E(x) = x_i d_i(x)/\beta$$

ただしβは正の定数

また、ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n)$のｉ番目の要素の符号を反転させたベクトルを

$$x[i] = \left(x_1, x_2, \dots -x_i, \dots x_n\right)$$

と表している.

2−1.E関数−E関数の性質①−

E関数の性質

なぜqがこのように表せるかについては、証明可能だが複雑なので割愛

性質①

E関数が存在しているとき、均衡確率ベクトルqが存在し、

$$q(x) = \frac{exp[-\beta E(x)]}{Z} \ where\ Z = \sum_x \exp[-\beta E(x)]$$

均衡確率ベクトル:
マルコフ過程において詳細つりあい条件$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$を満たす定常分布$\pi(x)$のこと

定常分布:
状態が収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

このときのπを定常分布といい、このπは

$$\pi\, p = \pi$$

の解である.(πはベクトル, pは遷移確率行列)
また、$\pi(y) \geq 0$かつ$\sum_y \pi(y) = 1$

つまり$q(x)$はpというマルコフ遷移を無限回繰り返した後に状態xになる確率

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} p^n(x)$$

2-1.E関数-E関数の性質②-

性質②

効用確定項

$$\begin{cases} d_i^+(x) = a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ d_i^-(x) = b_i + \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}\text{（対称性）} \\ a_{ii} = b_{ii} = 0\text{（強外部性）} \end{cases}$$

ならばE関数が存在し、次式で与えられる

$$\beta E(x) = -\sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$$

$$\text{where } c_i = \frac{a_i - b_i}{2},\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$$

2-1.E関数-E関数の感覚的理解-

確率的効用関数の確定項 $d_i^+(x), d_i^-(x)$が ・線形対称性 ・強外部性 を有するとき

都市の状態は確率的な均衡状態に収束する.
収束した均衡確率ベクトル

$$q(x) = \frac{\exp[-\beta E(x)]}{Z} \; where Z = \sum_x \exp[-\beta E(x)]$$

$\beta E(x)$が小さいほど、$-\beta E(x)$マルコフ遷移無限回後に状態xになる確率$q(x)$が大きい

・E関数は力学におけるエネルギーのように都市の状態の活性度を表している
（$E(x)$が小さければ都市は安定/不活性、$E(x)$が大きければ都市は不安定/活性）

・$-E(x)$は都市の状態の持続可能性を表す尺度
（$-E(x)$が大きければ都市は安定し、持続可能性が高い）

2-1.E関数-E関数の利用-

$E(x)$の値が小さければ都市は安定/不活性
$E(x)$の値が大きければ都市は不安定/活性
→$E(x)$の値の大小を確認すればO.K.

しかしながら$\beta E(x) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$

$$\text{where } c_i = \frac{a_i - b_i}{2},\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$$

$a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij}, x_i, x_j$の値を考えなければならなく、わかりづらい

より簡潔に都市の状態を考える方法はないか？

$E(x) = E$とおいて、Eとなる確率$\mathrm{P}(E)$を考えることで、
E（大きい値 → 都市が安定/小さい値 → 都市が不安定）
となる確率を求めることが出来る

2−1.E関数−E関数の利用−

E関数の値が$E(x)=E$となる確率を考える

$E(x)=E$となる　$c_i=\frac{a_i-b_i}{2},\ c_{ij}=\frac{a_{ij}-b_{ij}}{4}, x_i, x_j$　の組み合わせが

$n(E)$パターンあるとする（$n(E)$：Eの状態数）

$$
\begin{aligned}
P(E) &= n(E)\times q(x)|_{E(x)=E} \\
&= n(E)\times\frac{\exp[-\beta E]}{Z} \\
&= \exp\left(logn(E)\right)\times\exp[-\beta E]\times\frac{1}{Z} \\
&= \frac{\exp[-\beta E+logn(E)]}{Z}
\end{aligned}
$$

$E=E^*$（小さい値）となるときの確率$\mathrm{P}(E^*)$　＝　都市が安定/不活性となるときの確率

$E=E^{**}$（大きい値）となるときの確率$\mathrm{P}(E^{**})$　＝　都市が不安定/活性となるときの確率

2-1.E関数-E関数の利用-

$E = E^*$(小さい値)となるときの確率P(E^*) ＝ 都市が安定/不活性となるときの確率
$E = E^{**}$(大きい値)となるときの確率P(E^{**}) ＝ 都市が不安定/活性となるときの確率

$P(E)$の大小を調べることで、
都市が安定/不活性となるときの確率の高さ・低さ
都市が不安定/活性となるときの確率の高さ・低さ　がわかる

今後、簡単の為に、
都市が安定/不活性の場合を調べることを目標にするため
暗黙のうちにEが小さいことを想定して
$P(E)$が大きい→都市が安定する確率が高い＝均衡状態
$P(E)$が小さい→都市が不安定になる確率が高い＝活性化状態
として議論を進める

2-2.E-エントロピー

●都市状態のE-エントロピー

そもそも、E-エントロピーとは…

・物理学のエントロピー

状態の乱雑さを表す指標. エントロピーが低いと状態は安定せず、
エントロピーが高くなるにつれて状態は安定する.
自然界では、エントロピーは系全体としては減少することなく、時間とともに
増加を続ける. これが物理学の熱力学第2法則である.
（断熱系において不可逆変化が生じた場合、その系のエントロピーは増大する）

$$S = k \log n(E)$$

熱力学のエントロピー　定数　統計物理学での変量

$$S = k \log n(E)$$

E-エントロピー　定数　Eの状態数

どう取り入れるのかについては後述

都市状態のエントロピーと捉えると、
E-エントロピー : 都市状態の乱雑状況を示す指標

2−3.F関数

E関数の値がEとなる確率$P(E)$

$$P(E) = \frac{\exp[-\beta E + logn(E)]}{Z} whereZ = \sum_{x} \exp[-\beta E(x)]$$

これに$S = k \log n(E)$より$\log n(E) = \frac{S}{k}$を代入

$$P(E) = \frac{1}{Z} \exp[-\beta(E - \frac{S}{k\beta})]$$

よって、$P(E)$が最大になるとき、

$$-\beta\left(E - \frac{S}{k\beta}\right)が最大$$

βは正の定数なので、

$$E - \frac{S}{k\beta}が最小$$

$\underline{F = E - \frac{S}{k\beta}}$とおくと、$F$が最小のとき、$P(E)$が最大

F関数

$E = E^*$（小さい値）となるときの確率$P(E^*)$ ＝ 都市が安定/不活性となるときの確率

Fが最小のとき、$P(E)$が最大

→ Fが最小のとき、$E = E^*$（小さい値）となるときの確率$P(E^*)$が最大

＝都市が安定/不活性となるときの確率が最大

2-4.前半のまとめ

$E(x)$の値が小さければ都市は安定/不活性
$E(x)$の値が大きければ都市は不安定/活性
→$E(x)$の値の大小を確認すればO.K.

しかしながら$\beta E(x) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$
where $c_i = \frac{a_i - b_i}{2}$, $c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$
$a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij}, x_i, x_j$の値を考えなければならなく、わかりづらい

↓

より簡潔に都市の状態を考える方法はないか？

$E(x) = E$とおいて、Eとなる確率P(E)を考えることで、
E（大きい値 → 都市が安定/小さい値 → 都市が不安定）
となる確率を求めることが出来る

↓

$$q(x) = \frac{exp[-\beta E(x)]}{Z}$$
$$where\ Z = \sum_x \exp[-\beta E(x)]$$

$$P(E) = n(E) \times q(x)|_{E(x)=E}$$
$$= n(E) \times \frac{\exp[-\beta E]}{Z}$$
$$= \exp\big(logn(E)\big) \times \exp[-\beta E] \times \frac{1}{Z}$$
$$= \frac{\exp[-\beta E + logn(E)]}{Z}$$

↓

E-エントロピー$S = k \log n(E)$を代入

$$P(E) = \frac{\exp[-\beta E + logn(E)]}{Z}\ whereZ = \sum_x \exp[-\beta E(x)]$$
$$= \frac{1}{Z}\exp[-\beta(E - \frac{S}{k\beta})]$$
$$= \frac{1}{z}\exp[-\beta F]$$

$E(x) = E$とおいて、Eとなる確率P(E)を考えることで、
E（大きい値 → 都市が安定/小さい値 → 都市が不安定）
となる確率を求めることが出来る

↓

$F = E - \frac{S}{k\beta}$ が小さいとき、
Eが小さく（都市が安定）、かつEとなる確率P(E)が大きい

すなわち
F関数の最小化
→都市が安定/不活性となる確率が大きい

3.F関数の最小化準備

3-1.F関数の工夫

①（②のための）E関数の工夫

②F関数の工夫

3-2.E関数の工夫

③ボンドの概念

④平均場理論の導入

⑤トレース記法

3.F関数の最小化準備

$F = E - \frac{S}{k\beta}$のF最小化

ただし、

$$\beta E(x) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

$$\text{where } c_i = \frac{a_i - b_i}{2},\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$$

→ ややこしすぎるのでF関数を簡単にする必要がある
そのための準備として本章では以下を扱う

＜F関数の工夫＞
①(②のための)E関数の工夫
②F関数の工夫

＜E関数の工夫＞
③ボンドの概念
④平均場理論の導入
⑤トレース記法

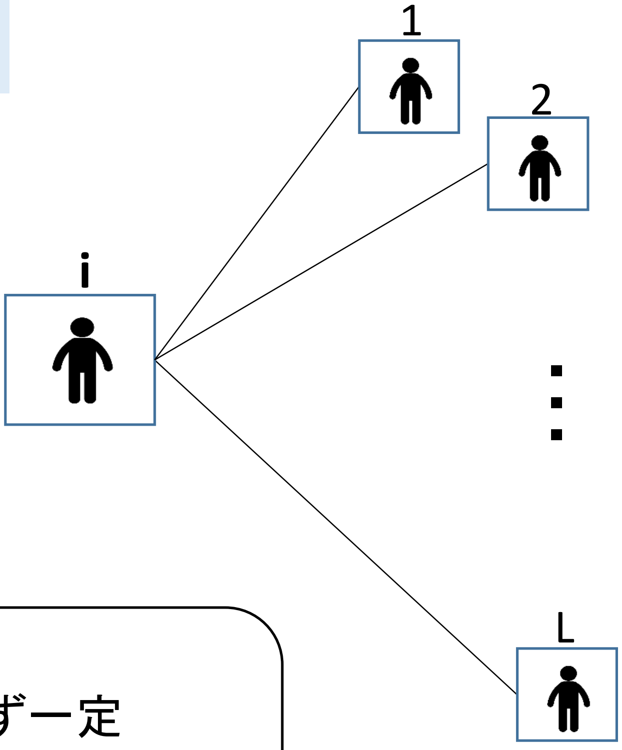
3-1.F関数の最小化準備-①E関数の工夫-

F関数の工夫

①(F関数の工夫のための)E関数の工夫

$$\beta E(x) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

$$\text{where } c_i = \frac{a_i - b_i}{2},\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$$



このE関数の確率分布の形状がどのようになるのか
簡単なケースを想定して大雑把な検討を行う.

＜想定＞

1. $c_i = c_1, c_{ij} = c_2$: 各パラメータが都市内の場所によらず一定
2. 各地点において周辺敷地L個からのみ影響を受ける(j=1,2,...,L)
3. 都市の各地点の土地利用状態がほぼ一様に平均値mになっている
   つまり、$x_i \cong m$

この仮定強すぎでは？

3-1.F関数の最小化準備-①E関数の工夫-

$$E(x) = -\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\beta} c_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \qquad \text{（想定1.）}$$

$$= -\frac{1}{\beta} c_1 \sum_{i=1}^{n} m - \frac{1}{\beta} c_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m x_j \qquad \text{（想定3.）}$$

$$= -\frac{1}{\beta} c_1 mn - \frac{1}{\beta} c_2 mn \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} c_1 mn - \frac{1}{\beta} c_2 mnL \qquad \text{（想定2.）}$$

$$= -\frac{1}{\beta}(c_1 + c_2 L) mn$$

以上より、$E(x) \propto n$　…①

想定をおいた特殊なケースでの議論であるが上記の式は一般的な場合でもほぼ成立していると考えられる.

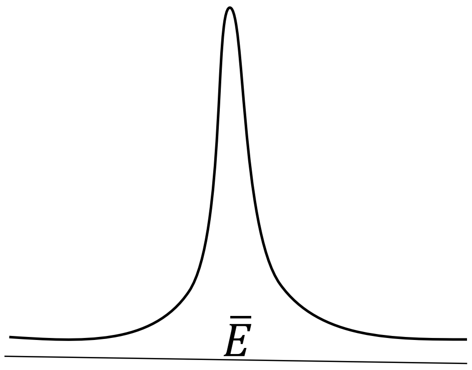
3-1.F関数の最小化準備-①E関数の工夫-

また、$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -\sigma^2(E)$　（詳しい導出は長いので（スライド末参考1）を参照）

$E(x) \propto n$　…①　より、$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -\sigma^2(E) \propto n$　…②

①,②より、平均$\bar{E}$で基準化した平均値からのずれは

$$\frac{\sqrt{\sigma^2(E)}}{\bar{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$



よって都市の中の敷地数nが限りなく多い場合、

$$\frac{\sqrt{\sigma^2(E)}}{\bar{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

つまり、敷地数が限りなく多い場合、平均$\bar{E}$で基準化した平均値からのずれは限りなく0に近づく.
すなわち、確率分布$P(E)$の形状は、平均値$\bar{E}$付近でピークとなり、それ以外ではほぼ0になることが分かる.

Eは4つの仮定の下で、一時的に$E = \bar{E}$として差し支えない

3-1.F関数の最小化準備-②F関数の工夫-

②F関数の工夫

Eは4つの仮定の下で、一時的に$E=\bar{E}$として差し支えないので、

$$F=E-\frac{S}{k\beta}=\bar{E}-\frac{S}{k\beta}\ \ldots③$$

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}=-\frac{S}{k}(-\frac{1}{\beta^2})$$

よって、

$$S=k\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}\ \ldots④$$

④を③に入れなおすと、

$$F=\bar{E}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\ \ldots⑤$$

また、

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[\beta F]=F+\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\ \ldots⑥$$

⑥に⑤を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[\beta F]=\bar{E}--\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}+\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}=\bar{E}\ \ldots⑦$$

3-1.F関数の最小化準備-②F関数の工夫-

また、$\mathrm{Z} = \sum_x \exp[-\beta E(x)]$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(logZ) = \frac{1}{Z}\sum_x \left(-E(x)\right)\exp[-\beta E(x)]$$

$$= \sum_x \left(-E(x)\right)\frac{\exp(-\beta E(x))}{Z} = -\sum_x E(x)q(x)$$

統計の期待値の定義

$$= -\bar{E} \ldots ⑧$$

⑦,⑧より、

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[\beta F] = -\frac{\partial}{\partial\beta}(logZ)$$

$$\beta F = -logZ + C \ \ (C\text{: 積分定数})$$

適当なスケーリングのもとで（説明は割愛）$C = 0$と仮定することにより、

$$F = -\frac{1}{\beta}logZ$$

3-2.F関数の最小化準備-③ボンドの概念-

E関数の工夫

③ボンドの概念

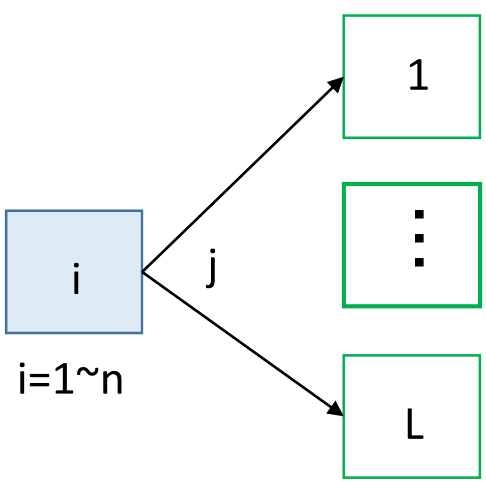
隣接している敷地からは影響を受けるが、隣接してない遠方の敷地からの影響はうけていないと仮定する.
そこで、影響関係にあるふたつの敷地の組を「ボンド」と呼び、

$$(i,j) \in B$$

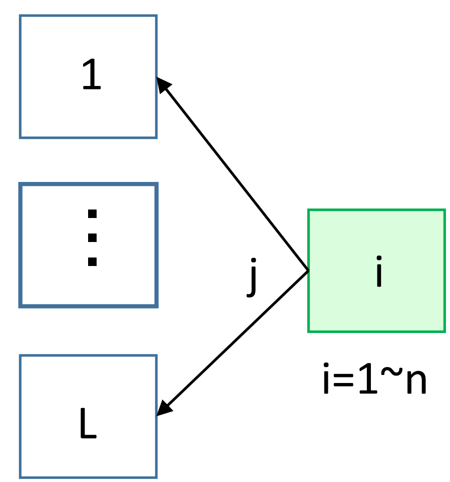
と表す.

各敷地でL個の敷地から影響を受けるとすると、ボンドの総数n_bとすると

$$n_b = \frac{1}{2} nL$$



ダブルカウントしていることになる



3-2.F関数の最小化準備-④平均場理論導入-

④平均場理論の導入

解析の困難さを回避するために平均場理論を用いる

平均場理論：統計物理学で用いる手段．2次項を1次近似するものとして考えてよい．

各敷地 i での土地利用状態：$\boldsymbol{x_i}$ →この確率変量の期待値をmとする

$$< x_i >= \bar{x_i} = m$$

$$< x_i >^2 = (\bar{x_i})^2 = m^2$$

$$\underbrace{x_i}_{\text{確率変量}} = \underbrace{m}_{\text{確定変量}} + \underbrace{\delta x_i}_{\text{確率変量}}$$

離散選択モデル
のときと同様、
確定項＆誤差項
のようなイメージ

3-2.F関数の最小化準備-④平均場理論導入-

$$\begin{cases} x_i = m + \delta x_i \\ x_j = m + \delta x_j \end{cases}$$

前項に比べて微小なので
無視できる

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in B} x_i x_j &= \sum_{(i,j)\in B} (m + \delta x_i)(m + \delta x_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in B} \left(m^2 + m\left(\delta x_i + \delta x_j\right) + \delta x_i \delta x_j\right) \\
&\cong \sum_{(i,j)\in B} \left(m^2 + m\left(\delta x_i + \delta x_j\right)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in B} \left(m^2 + m\left(x_i - m + x_j - m\right)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in B} \left(-m^2 + m\left(x_i + x_j\right)\right)
\end{aligned}$$

平均場理論を用いたことで二次の和を一次の和にすることが可能

3-2.F関数の最小化準備-⑤トレース記法-

⑤トレース記法

トレース記法：計算を簡便に表す記法

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$という関数が与えられたとき、変数の組み合わせ数は、（本設定では$x_i = 1\ or\ -1$であるから）2^n通り.
各場合2^n通りの関数値の合計を$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$のトレースと呼び、以下のように定義する.

$$Trf(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{x_1=1}^{-1}\sum_{x_2=1}^{-1}\dots\sum_{x_n=1}^{-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

トレース記法を用いると、確率変数x_iの期待値mは次のように表すことが出来る.

$$m = < x_i > = \sum_{x_1=1}^{-1}\sum_{x_2=1}^{-1}\dots\sum_{x_n=1}^{-1} x_i q(x_i) = Trx_i q(x_i)$$
$$= Tr\frac{x_i}{Z}\exp(-\beta E(x_i))$$

4.F関数の最小化

4-1.F関数の整理

4-2.F関数の最小化

4-3.中盤のまとめ

4-4.テイラー展開でのF関数近似

4-5.F関数の外形

4-6.グラフの考察

4-1.F関数の最小化-F関数の整理-

F関数の最小化にあたり、2つのモデルを考える

$$\beta E(x) = -\sum_{(i,j)\in B} c_i x_i - \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}\, x_i\, x_j \text{ where } c_i = \frac{a_i - b_i}{2},\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - b_{ij}}{4}$$

各パラメータが都市内の場所によらず一定 とし、$c_1 = \frac{c_i}{\beta},\ c_{ij} = \frac{c_{ij}}{\beta}$とおく

一様相互作用モデル

2敷地の相互作用のみ考慮し、敷地自身の持つ効用項を無視したもの.
（強外部性を持つと仮定し他場合のモデル）

$$E(x) = -c_2 \sum_{(i,j)\in B} x_i\, x_j$$

一様空間モデル

2敷地の相互作用ならびに、敷地自身の持つ効用項を考慮したもの.

$$E(x) = -c_2 \sum_{(i,j)\in B} x_i\, x_j - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

※
途中まで一様空間モデルで式展開し、その後一様相互作用モデル（$c_1 = 0$）の場合を考える

4−1.F関数の最小化−F関数の整理−

$$E(x) = -c_2 \sum_{(i,j)\in B} x_i \, x_j - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

④平均場理論

$$= -c_2 \sum_{(i,j)\in B} \left(\underline{-m^2 + m\left(x_i + x_j\right)}\right) - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

$$= c_2 m^2 \textstyle\sum_{(i,j)\in B} 1 - c_2\, m \sum_{(i,j)\in B}\left(x_i + x_j\right) - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

$$= c_2 m^2 \underline{n_b} - c_2\, m\underline{L} \textstyle\sum_{(i,j)\in B} x_i - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

③ボンドの概念

$$= c_2 m^2 n_b - \left(c_2 mL + c_1\right) \textstyle\sum_{(i,j)\in B} x_i$$

$F = -\frac{1}{\beta} logZ$ （②F関数の工夫より）

まずZを求める

$$Z = \textstyle\sum_x \exp[-\mathrm{\beta} E(x)]$$

$$= Tr\ exp[-\beta E(x)]$$

$$= Tr\ \exp[-\beta\{c_2 m^2 n_b - (c_2 mL + c_1)\ \textstyle\sum_{(i,j)\in B} x_i\}]$$

$= \cdots$(ひたすら2ページ程にわたり計算し続ける)

$$= \exp[-\beta c_2 m^2 n_b]\,[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]^{\,n}$$

⑤トレース記法

4−1.F関数の最小化−F関数の整理−

$$F = -\frac{1}{\beta} logZ$$

$$= -\frac{1}{\beta}\log\{\exp[-\beta c_2 m^2 n_b]\,[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]^{\,n}\}$$

$$= c_2 m^2 n_b - \frac{n}{\beta}\log[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]$$

F関数の整理が終了!!!
やっと最小化できる～!!!

4-2.F関数の最小化

Fをmについて最小化する
（各利点での土地利用の状態の平均値mが都市が安定となるときどうなのかを知りたい）

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 2c_2 m n_b - n c_2 L\, tanh(\beta(c_2 m L + c_1))$$
$$= c_2 m n - n c_2 L\, tanh(\beta(c_2 m L + c_1)) \quad (\because n_b = \frac{1}{2} n L)$$

一階条件 $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$

$$c_2 \boldsymbol{m} n - n c_2 L\, tanh(\beta(c_2 \boldsymbol{m} L + c_1)) = 0$$

→ このままでは複雑で解けないので、簡単にする必要

4-3.中盤のまとめ

（前半） F関数を最小化 → 都市が安定となる確率が最も高い

（後半）F関数を最小化したいが、$F = E - \frac{S}{k\beta}$ が複雑

＜F 関数の工夫＞
①（②のための）E関数の工夫
②F関数の工夫
＜E関数の工夫＞
③ボンドの概念
④平均場理論の導入
⑤トレース記法
①～⑤を取り入れえることで、F関数を簡単にすることが出来る

→ しかしながらそれでも尚F関数複雑なので、グラフの外形が分からない

F関数を近似して、F関数のmに関するグラフの外形を調べる

4-4.F関数の最小化-テイラー展開での近似-

F関数を簡単にしたい

$$\mathrm{F} = c_2 m^2 n_b - \frac{n}{\beta}\log[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]$$

原点付近で展開するのはmの値が0付近だと予想される為

この部分が複雑なので原点を中心にテイラー展開(マクローリン展開)

$$\varphi(x) = \log[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)m + \frac{\varphi''(0)}{2\cdot 1}m^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3\cdot 2\cdot 1}m^3 + \frac{\varphi''''(0)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}m^4$$
$$= log2 + \frac{(\beta c_2 L)^2}{2}m^2 - \frac{(\beta c_2 L)^4}{12}m^4$$

よって、

$$F \cong c_2 m^2 n_b - \frac{n}{\beta}\varphi(x)$$
$$= c_2 m^2 n_b - \frac{n}{\beta}\{log2 + \frac{(\beta c_2 L)^2}{2}m^2 - \frac{(\beta c_2 L)^4}{12}m^4\}$$
$$= -\frac{n}{\beta}log2 + (c_2 n_b - \frac{n(\beta c_2 L)^2}{2\beta})\, m^2 + \frac{n(\beta c_2 L)^4}{12\beta}m^4$$
$$= -\frac{n}{\beta}log2 + \frac{c_2 nL}{2}(1 - \beta c_2 L)\, m^2 + \frac{n(\beta c_2 L)^4}{12\beta}m^4$$

4−5.F関数の最小化−F関数の外形−

$$F = -\frac{n}{\beta} log2 + \frac{c_2 nL}{2}(1-\beta c_2 L)\, m^2 + \frac{n(\beta c_2 L)^4}{12\beta} m^4$$

$$\frac{\partial F(m)}{\partial m} = c_2 nL(1-\beta c_2 L)m + \frac{n\beta^3 (c_2 L)^4}{3} m^3$$

$$\frac{\partial^2 F(m)}{\partial^2 m} = c_2 nL(1-\beta c_2 L) + n\beta^3 (c_2 L)^4 m^2$$

一階条件$\frac{\partial F(m)}{\partial m} = 0$のときの$m = 0, \pm m^*$とする.

二階条件$\frac{\partial^2 F(m)}{\partial^2 m}$を原点付近でみてみると、

原点付近で確認するのはmの値が0付近だと予想される為

$m = 0$のとき、$\frac{\partial^2 F(m)}{\partial^2 m} = c_2 nL(1-\beta c_2 L)$

(i) $\beta c_2 L \leq 1$ のとき、$\frac{\partial^2 F(m)}{\partial^2 m} \geq 0$

(ii)$\beta c_2 L > 1$のとき、$\frac{\partial^2 F(m)}{\partial^2 m} < 0$

4–5.F関数の最小化–F関数の外形–

一様相互作用モデル

2敷地の相互作用のみ考慮し、敷地自身の持つ効用項を無視したもの.
(強外部性を持つと仮定し他場合のモデル)

$$E(x) = -c_2 \sum_{(i,j)\in B} x_i\, x_j$$

$c_1 = 0$

一様空間モデル

2敷地の相互作用ならびに、敷地自身の持つ効用項を考慮したもの.

$$E(x) = -c_2 \sum_{(i,j)\in B} x_i\, x_j - c_1 \sum_{(i,j)\in B} x_i$$

$c_1 \neq 0$

近似する前の式$\mathrm{F} = c_2 m^2 n_b - \frac{n}{\beta} \log[2\cosh\left(\beta(m + \frac{c_1}{c_2 L}\right))]$

つまり一様相互作用モデル全体を負の方向に$\frac{c_1}{c_2 L}$動かしたものが一様空間モデル

4-5.F関数の最小化-F関数の外形-

一様相互作用モデル $c_1 = 0$

左に $\frac{c_1}{c_2 L}$

一様空間モデル $c_1 \neq 0$

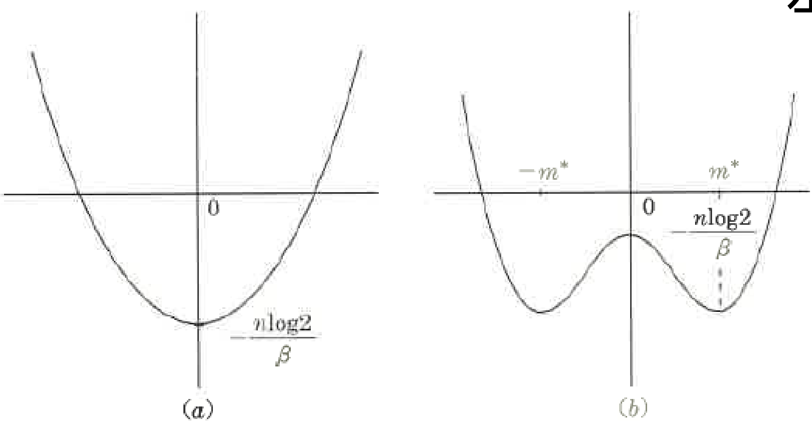


図4-2　F関数の形状

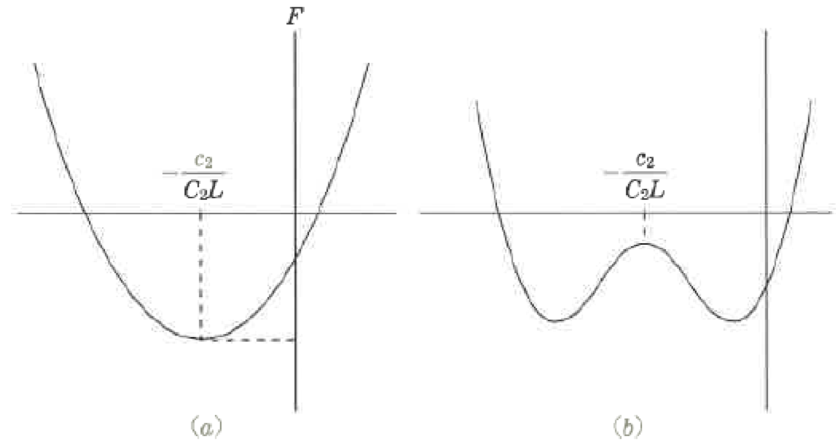


図4-4　F関数の形状

(i) $\beta c_2 L \leq 1$

Fの最小値1つ

都市が安定する確率が高い時のmの値が1つ

(ii)$\beta c_2 L > 1$

Fの最小値2つ

都市が安定する確率が高い時のmの値が2つ

(i) $\beta c_2 L \leq 1$

Fの最小値1つ

都市が安定する確率が高い時のmの値が1つ

(ii)$\beta c_2 L > 1$

Fの最小値2つ

都市が安定する確率が高い時のmの値が2つ

4−6.F関数の最小化−グラフの考察−

一様相互作用モデル $c_1 = 0$ → 一様空間モデル $c_1 \neq 0$

左に $\frac{c_1}{c_2 L}$

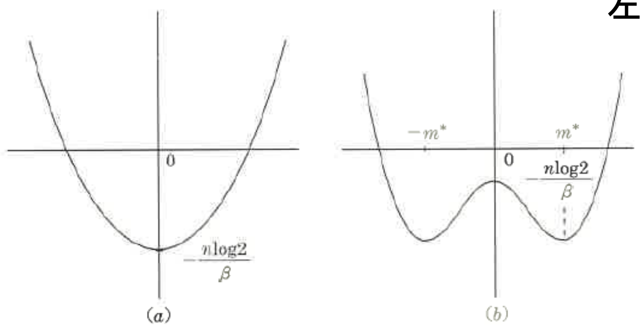


図4-2　F関数の形状

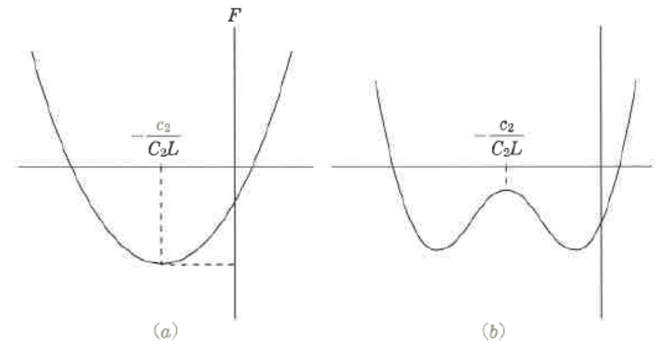


図4-4　F関数の形状

(i) $\beta c_2 L \leq 1$のとき、都市が安定（Fが最小）のとき、$m = 0$
　各敷地の土地利用の平均値は0
　→ 土地利用-1と土地利用+1が混在していて土地利用はランダムになる

(ii)$\beta c_2 L > 1$のとき、都市が安定（Fが最小）のとき、$m = \pm m^*$
　各敷地の土地利用の平均値は正か負に偏っている
　→土地利用-1もしくは土地利用+1に偏っていて、都市の土地利用は比較的一様

4−6.F関数の最小化−グラフの考察−

一様相互作用モデル $c_1 = 0$

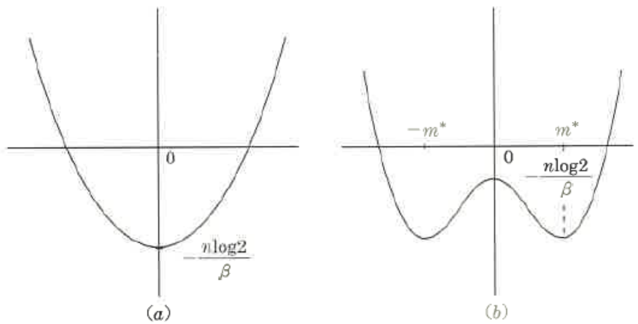


図4-2　F関数の形状

一様空間モデル $c_1 \neq 0$

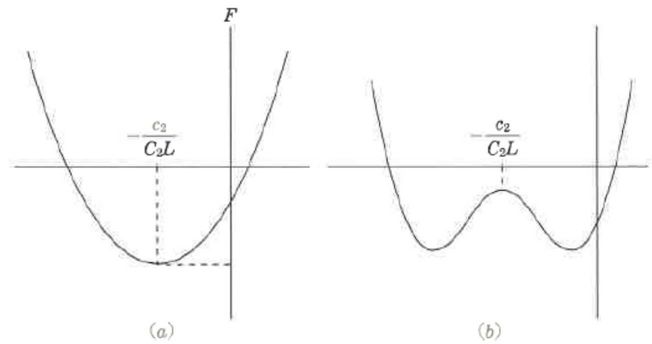


図4-4　F関数の形状

また、$c_1 \neq 0$のとき、左に$\frac{c_1}{c_2L}$動かしていることから、$c_1 = \frac{a_i - b_i}{2}$ つまり、ある敷地とその敷地に影響を与える敷地の持つ効用差を変えることで各敷地の土地利用の平均mを左右に大きく動かすことが出来る.

→パラメータc_1の表す敷地固有のインセンティヴや助成金などの優遇措置を用いた強制的なインセンティブによって平均値はいずれかに偏ることとなる

4-6.F関数の最小化-グラフの考察-

ただし、このグラフはF関数を近似し、大まかな外形を掴むためのものであり、
F関数そのものとは異なる為、最小値をとるときのmの値はもちろん、
グラフの対称性等、F関数そのものと異なるところが多いので議論する場合
は注意が必要.

おまけ−F関数の検証−

p.35より…

トレース記法を用いると、確率変数x_iの期期待値mは次のように表すことが出来る.

$$m =< x_i >= \sum_{x_1=1}^{-1} \sum_{x_2=1}^{-1} \dots \sum_{x_n=1}^{-1} x_i q(x_i) = Tr x_i q(x_i)$$
$$= Tr \frac{x_i}{Z} \exp(-\beta E(x_i))$$

p.38より … $E(x) = c_2 m^2 n_b - (c_2 mL + c_1) \sum_{(i,j)\in B} x_i$

$$Z = \exp[-\beta c_2 m^2 n_b] \, [2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]^{\,n}$$

$$m = Tr \frac{x_i \exp\left(-\beta\left(c_2 m^2 n_b - (c_2 mL + c_1) \sum_{(i,j)\in B} x_i\right)\right)}{\exp[-\beta c_2 m^2 n_b] \, [2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]^{\,n}}$$

$= \cdots$ (ひたすら2ページ程にわたり計算し続ける)

$$= \frac{\exp[\beta(c_2 mL + c_1)] - \exp[-\beta(c_2 mL + c_1)]}{[2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1))]}$$
$$= \tanh(2\cosh(\beta(c_2 mL + c_1)))$$

一階条件 $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$

$c_2 \boldsymbol{m} n - n c_2 L \, tanh(\beta(c_2 \boldsymbol{m} L + c_1)) = 0$

p.40のF関数の一階条件と同じ式!!

参考1

確率的に変動するシステムを，より単純に記述するために，統計量を用いることが多い．系の全体の（平均的な）様子を記述するものとして期待値が用いられる．そのうち，もっとも頻繁に活用されるのが平均値である．つまり，確率変量 X の期待値 $\overline{X}$ は，

$$\overline{X}=\sum_i X_i p_i \tag{3.1a}$$

ここに，確率変量が X_i となる確率を p_i とする

また，確率変量が連続量の場合は上記の和は積分で次のように表現される．

$$\overline{X}=\int_X Xp(X)dX \tag{3.1b}$$

これらの期待値演算は，

$$\overline{X}=\langle X\rangle \tag{3.1c}$$

と表記することもある．

平均について使用される統計量として分散がある．それは，確率変量のばらつきを表現する量で，変量 X の分散 σ^2 は平均 $\overline{X}$ からの差の自乗の期待値として，以下のように定義される．

$$\sigma^2(X)=\langle(X-\overline{X})^2\rangle \tag{3.2a}$$

この定義からわかるように分散は非負の量である．0 となるのはまったくばらつきがない場合であり，本研究で扱う確率変量では，原則分散は正の量と考えてよい．

さらに，この式は，以下のように書き直すこともできる．

$$\sigma^2(X)=\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2 \tag{3.2b}$$

$$\begin{aligned}\overline{E}&=\sum_x E(x)p(x)=\frac{1}{Z}\sum_x E(x)\exp[-\beta E(x)]\\&=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\end{aligned} \tag{3.3a}$$

また，分散については，（3.2b）式より，

$$\sigma^2(E)=\frac{1}{Z}\sum_x E^2(x)\exp[-\beta E(x)]-\left(\frac{1}{Z}\sum_x E(x)\exp[-\beta E(x)]\right)^2 \tag{3.4}$$

である．

一方，上記の（3.3a）式を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta}&=\frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}\\&=\langle E\rangle^2-\frac{1}{Z}\sum_x E^2(x)\exp[-\beta E(x)]\\&=\langle E\rangle^2-\langle E^2\rangle\end{aligned} \tag{3.5a}$$

が得られる．（3.2b）式より，

$$\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta}=-\sigma^2(E) \tag{3.5b}$$

という関係式が得られる．