

# A link based network route choice model with unrestricted choice set

Mogen Fosgerau, Emma Frejinger, Anders Karlstrom

---

2017/04/28(金)

春の理論ゼミ

M1山野

# 目次

---

- ✓ RLモデルの説明
- ✓ Link Sizeの導入
- ✓ 最尤法による計算手順
- ✓ RLモデルを用いた推定
- ✓ まとめ

# 経路選択

- 経路選択モデルは、インフラ投資、交通規制、容量制御、経路案内など、幅広く利用されてきた。
- 近年のGPS技術進歩・普及により、正確な経路情報が得られるようになってきている。(実際の経路が直接観測できる)
- 今までの経路選択モデルでは、各経路は個別のものとしてコストを計算していたが、パラメータの精度に左右される



## Recursive Logit Model:

再帰的な逐次経路選択モデル

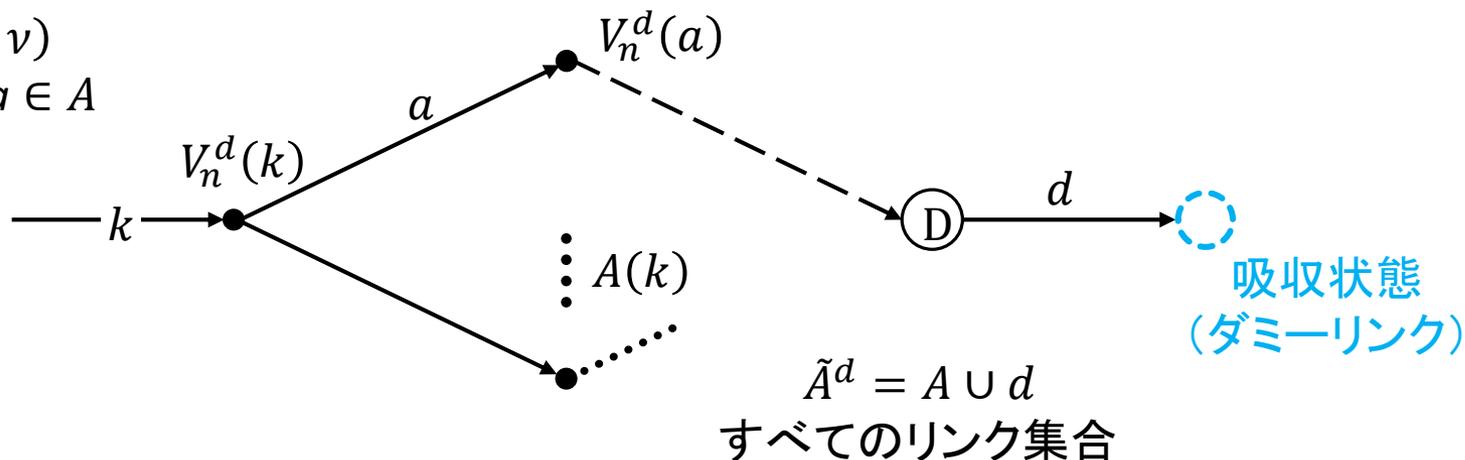
動的計画問題(DP)に対する効用最大化に基づいた動的選択モデル

# 動的経路選択モデル

- 簡単のため、時間に対して静的なネットワークを考える.
- 各意思決定において、リンク $k$ の終端ノードに接続するリンク集合 $A(k)$ が選択肢.

$$a \in A(k) \subset A$$

$G = (A, v)$   
links  $k, a \in A$



# 動的経路選択モデル

- 各選択肢の効用は、
 

$$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu \varepsilon_n(a) + V_n^d(a) \quad (1)$$

平均0のGumbel分布に従う誤差項  
( $\mu$ :スケールパラメータ)

⇒ (現状状態kにおける行動aの効用) + (将来の状態aにおける期待効用)

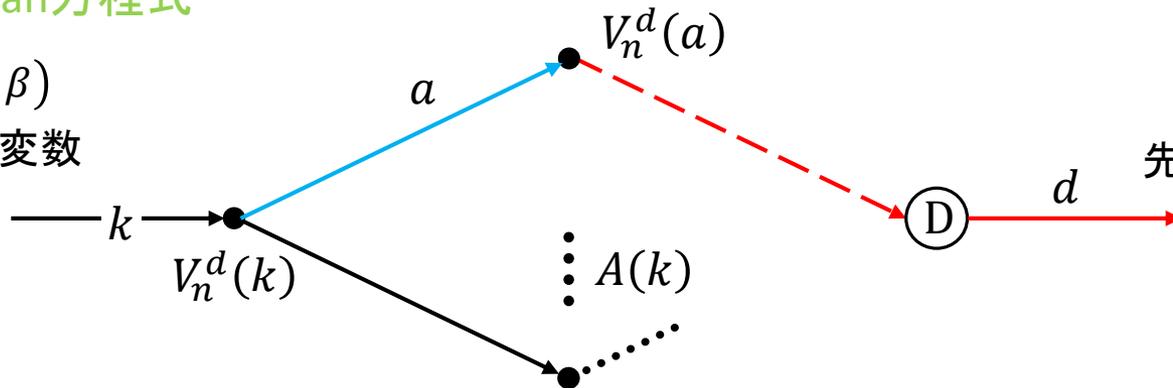
- マルコフ過程に基づいて行動aを選択  
(価値関数)

$$V_n^d(k) = E \left[ \max_{a \in A(k)} u_n(a|k) \right] \quad \forall k \in A$$

$$= E \left[ \max_{a \in A(k)} \left( v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu \varepsilon_n(a) \right) \right] \quad \forall k \in A \quad (2)$$

Bellman方程式

$v_n(a|k) = v(x_{n,a|k}; \beta)$   
 $x_{n,a|k}$ : リンクの説明変数  
 $\beta$ : パラメータ



$v(d|k) = 0$   
 $V(d) = 0$   
 目的地Dより  
 先に行くことはない

# 動的経路選択モデル

$$\begin{aligned}
 V_n^d(k) &= E \left[ \max_{a \in A(k)} u_n(a|k) \right] \quad \forall k \in A \\
 &= E \left[ \max_{a \in A(k)} \left( v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu \varepsilon_n(a) \right) \right] \quad \forall k \in A \quad (2)
 \end{aligned}$$

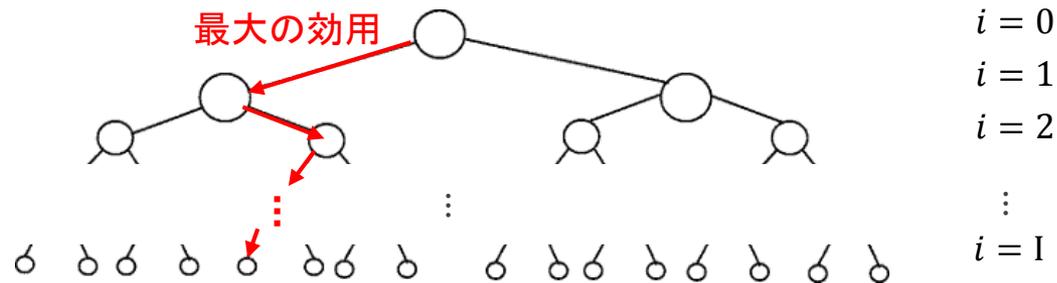
意思決定者  $n$  は効用最大化理論に従って行動.

→  $n$  が得る効用は、「選択肢のうち最大の効用」

価値関数の定義は「現在のリンクにいるとき、それ以降の経路で得られる効用の期待値」



価値関数は「最大の効用の期待値」



# 動的経路選択モデル

状態 $k$ におけるリンク $a$ の選択確率は、以下のロジット型で表される。

$$P_n^d(a|k) = \frac{e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k)+V_n^d(a))}}{\sum_{a' \in A(k)} e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a'|k)+V_n^d(a'))}} \quad (3)$$

ガンベル分布に従う誤差項 $\varepsilon(a)$ の最大値の期待値が、ログサム変数になることから、価値関数は以下のように表される。

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k)+V_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases} \quad (4)$$

(ガンベル分布の性質)

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_j$ がそれぞれ $(\eta_1, \mu), (\eta_2, \mu), \dots, (\eta_j, \mu)$ の  
パラメータをもつ互いに独立なガンベル分布に従うときは、  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_j$ の最大値もガンベル分布に従い、  
そのパラメータは右のようになる

$$\mu \ln \sum_j e^{\frac{1}{\mu} \eta_j}$$

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# 動的経路選択モデル

簡単のため、 $V_n^d(k) = V(k)$ と表して式(4)を変形すると、

$$e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

これを行列表示で簡潔にするため、

・ $\mathbf{M}(|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|)$ は、

$$M_{ka} = \begin{cases} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

・ $\mathbf{b}(|\tilde{A}| \times \mathbf{1})$ は、

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \neq d \\ 1 & k = d \end{cases}$$

・ $\mathbf{z}(|\tilde{A}| \times \mathbf{1})$ は、

$$z_k = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$$

→

$$\mathbf{z} = \mathbf{Mz} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# 動的経路選択モデル

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\mu}V(1)} \\ \vdots \\ e^{\frac{1}{\mu}V(k)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \\ \vdots & e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\mu}V(1)} \\ \vdots \\ e^{\frac{1}{\mu}V(k)} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(I - M)**が逆行列を持つことが、価値関数が解を持つ条件

$$e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

# 経路選択確率

$$P(\sigma) = \prod_{i=0}^{I-1} P(k_{i+1}|k_i) \quad (7)$$

$$= \prod_{i=0}^{I-1} \frac{e^{\frac{1}{\mu}(v(k_{i+1}|k_i)+V(k_{i+1}))}}{\underbrace{\sum_{a \in A(k_i)} e^{\frac{1}{\mu}(v(a|k_i)+V(a))}}_{e^{\frac{1}{\mu}V(k_i)}}} \times \delta(a|k_i)$$

経路 $\sigma$ は、リンク $k_i$ の連続.

$$\sigma = \{k_i\}_{i=0}^I$$

$k_0$ : Origin,  $k_I = d$

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}(v(k_{i+1}|k_i)+V(k_{i+1})-V(k_i))}$$

$$V(k_I) = V(d) = 0$$

$$= \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} \times \prod_{i=0}^{I-1} \frac{e^{\frac{1}{\mu}V(k_{i+1})}}{e^{\frac{1}{\mu}V(k_i)}}$$

$$P_n^d(a|k) = \frac{e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k)+V_n^d(a))}}{\sum_{a' \in A(k)} e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a'|k)+V_n^d(a'))}} \quad (3)$$

$$= \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} \times \frac{e^{\frac{1}{\mu}V(k_I)}}{e^{\frac{1}{\mu}V(k_0)}}$$

$$= e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} \quad \dots (8)$$

$$e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k)+V(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

# 経路選択確率

$v(\sigma) = \sum_{i=0}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i)$  とすると

$$P(\sigma) = e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} = \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{e^{\frac{1}{\mu}V(k_0)}}$$

$$e^{\frac{1}{\mu}V(k_0)} = \sum_{k_1 \in A(k_0)} \delta(k_1|k_0) e^{\frac{1}{\mu}(v(k_1|k_0) + V(k_1))}$$

$$= \sum_{k_1 \in A(k_0)} e^{\frac{1}{\mu}v(k_1|k_0)} \times e^{\frac{1}{\mu}V(k_1)}$$

$$= \sum_{k_1 \in A(k_0)} \left[ e^{\frac{1}{\mu}v(k_1|k_0)} \times \sum_{k_2 \in A(k_1)} \left\{ e^{\frac{1}{\mu}v(k_2|k_1)} \times \right. \right.$$

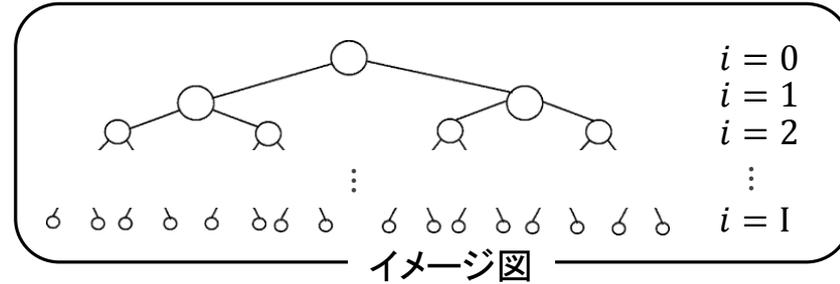
$$\left. \left. \dots \times \sum_{k_I \in A(k_{I-1})} \left( e^{\frac{1}{\mu}v(k_I|k_{I-1})} \right) \dots \right\} \right]$$

$$= \sum_{\{k_i\}_{i=0}^I \in \Omega} e^{\frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i)}$$

$$= \sum_{\sigma' \in \Omega} e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma')}$$

( $\Omega$ : 経路の選択肢集合)

$$e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$



$$\therefore P(\sigma) = \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{\sum_{\sigma' \in \Omega} e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma')}} \quad (9)$$

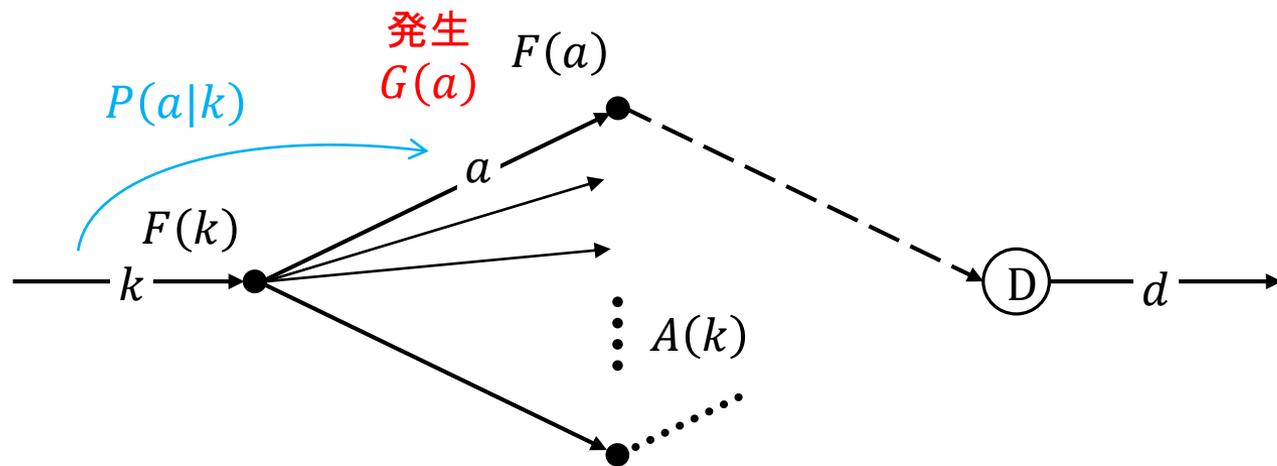
同一のODを持つ2つの経路 $\sigma_1, \sigma_2$ の選択確率比は、 $v(\sigma_1) - v(\sigma_2)$ のみに依存

# リンクフロー

- リンクベースで考えると、交通量の算出も行える

$$F(a) = G(a) + \sum_{k \in A} P(a|k)F(k) \quad (10)$$

$G(a)$ : 出発リンクaで発生→目的地dのトリップ需要  
 $F(a)$ : リンクaの期待流量



行列表示して

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{P}^T \mathbf{F} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T) \mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (11)$$

# 経路選択モデルのリンク重複

- ここまで、動的経路選択がロジット型で表すことができることを示した。
- ただしこの場合には、経路間のリンク重複が問題となる



C-Logit, Path Size Logit : 重複してると魅力減少

$$PS_{jn} = \sum_{a \in \Gamma_j} \frac{L_a}{L_j} \frac{1}{\sum_{i \in C_n} \delta_{ai}}$$

$L_a$ :リンクaの長さ  
 $C_n$ :経路選択肢の集合

$$\delta_{ai} = \begin{cases} 1 & a \in \text{経路}i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\sum_{i \in C_n} \delta_{ai}$ :リンクaを含む  
経路選択肢の数

$$\Rightarrow PS_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{経路}j\text{はどのリンクも重複していない} \\ (0,1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- PSはすべての経路選択肢の列挙が必要(not link additive) → RLには使えない



Link Size 項の導入

# Link Size修正項

- LSでは, リンクを共有する経路選択肢の数ではなく, 重複部分の個数に対する代替案として, **期待リンク流量**を用いる

$$\mathbf{LS}^{od} = \mathbf{F}^{od}(\tilde{\beta}) \quad (12) \quad \tilde{\beta} : (\text{説明変数の})\text{パラメータ}$$

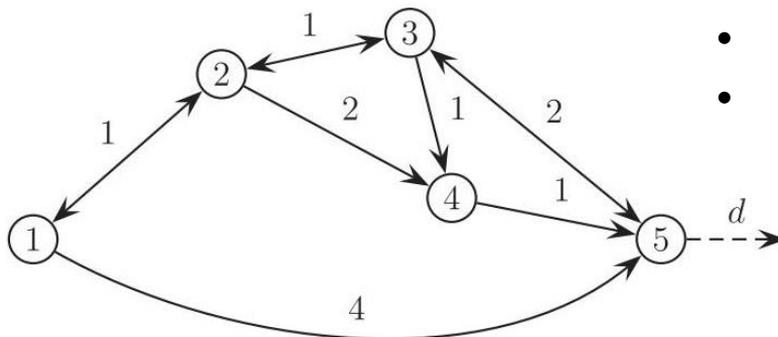
$\mathbf{F}^{od}(\tilde{\beta})$  は, 発生流量を  $\mathbf{G}^0$  としたときの式(11)の解

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}^d(\tilde{\beta})^T\right) \mathbf{F}^{od}(\tilde{\beta}) = \mathbf{G}^0 \quad (13)$$

$$\mathbf{G}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \text{起点での発生量が1}$$

各リンク  $k$  のLS値は,  $0 \leq \mathbf{LS}_k^{od} \leq 1$

# Logit と RL の比較

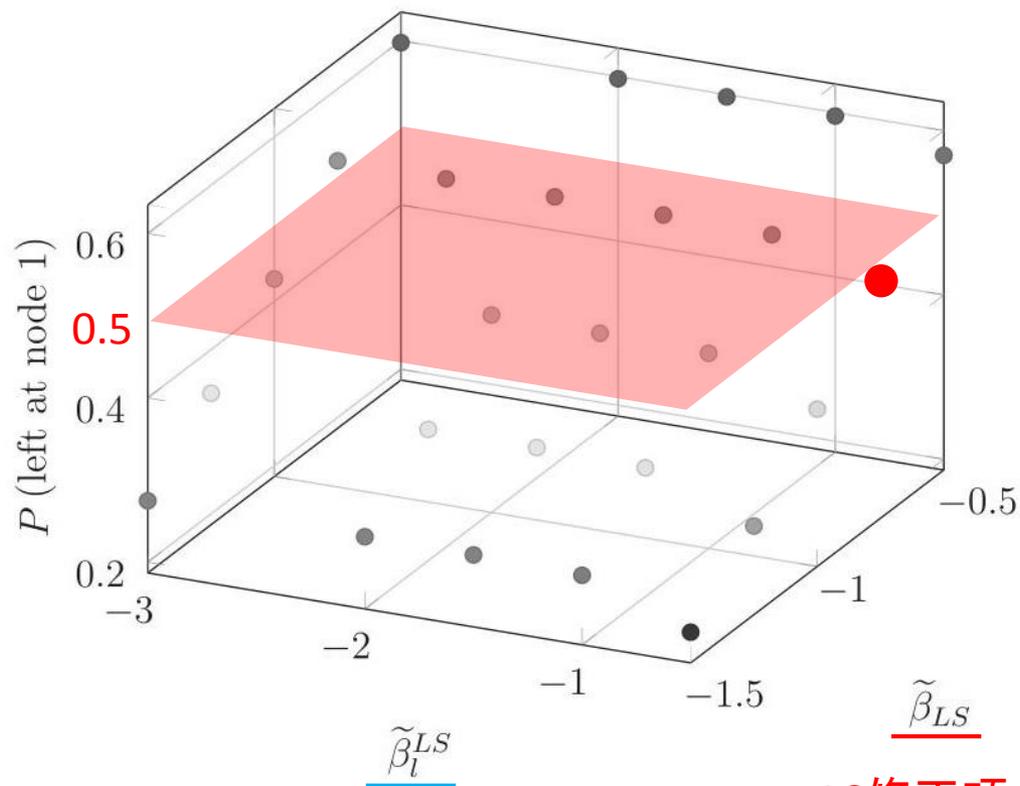


- Uターン禁止
- コストはリンク長のみ ( $\tilde{\beta}_l = -1.5$ )

Paths	Logit	RL	PSL	RL with LS
1: 12, 23, 35	0.25	0.2495	0.20	0.19
2: 12, 23, 34, 45	0.25	0.2502	0.12	0.13
3: 12, 24, 45	0.25	0.2495	0.20	0.19
4: 15	0.25	0.2495	0.48	0.48

- RL (Recursive logit) ではLogit (MNL) と同じくリンクの重複が考慮されず、均等に配分されているが、RL with LSではPSLと同じく改善されている。
- RLでは周回経路を考慮してしまうため、等配分とはならず、わずかなずれが生じている。
- 精度は同様の結果となったが、経路列挙が必要ない点で優れている。

# Link Sizeとリンク効用



リンク長パラメータ

LS修正項のパラメータ

# 最尤法

- 価値関数は、Rust's Nested Fixed Point Algorithm (NFXP) と似た手法で計算することができる。
- BFGS法(反復計算)を用いてパラメータを特定する。
- このとき推定パラメータのもとですべての観測結果が解を持つように、無限ループ回路が存在しないなどの仮定をおく。



これにより式(6)が計算できるようになる

- さらに正確さを高めるため、analytical gradient を導入する

$$\text{(尤度関数)} LL(\beta) = \ln \prod_{n=1}^N P(\sigma_n) = \frac{1}{\mu} \prod_{n=1}^N \prod_{i=0}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i) - V(k_0) \quad (14)$$

analytical derivative は,

$$\frac{\partial LL(\beta)}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \prod_{n=1}^N \left[ \prod_{i=0}^{I-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right] \quad (15)$$

$$v_n(a|k) = v(x_{n,a|k}; \beta)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{Mz} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$P(\sigma) = e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} \quad (8)$$

# 最尤法

$$\frac{\partial LL(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \prod_{n=1}^N \left[ \prod_{i=0}^{I-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right] \quad (15)$$

うまく行列で表示するため、式(6)の偏微分を計算して、

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta_q} \right] \mathbf{z} \quad (16)$$

$$z_k = e^{\frac{1}{\mu} V(k)}, \frac{\partial z}{\partial \beta_q} = \mathbf{z} \circ \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial \beta_q} \text{ だから}$$

$$\frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} = \mu \frac{1}{z_0} \left( \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} \right)_0 \quad (17)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$P(\sigma) = e^{-\frac{1}{\mu} V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu} v(k_{i+1}|k_i)} \quad (8)$$

# 推定実験

- Borlange (スウェーデン) の実ネットワーク (3077 ノード, 7459 リンク) を用いて計算.

1. シミュレーションデータでのモデル推定
2. GPSデータを用いたパラメータ推定

- 効用は以下のように設定する.

$$v(a|k) = \beta_{TT} TT_a + \beta_{LT} LT_{a|k} + \beta_{LC} LC_a + \beta_{UT} UT_{a|k} \quad (18)$$

$TT_a$ : リンク  $a$  における旅行時間

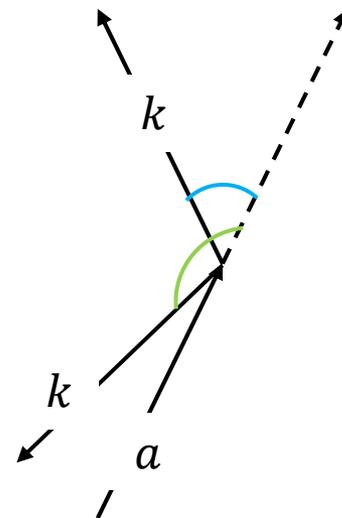
$LT_{a|k}$ : 左折ダミー ( $k \rightarrow a$  で左方向に  $40^\circ$  以上のとき 1, それ以外で 0)

$LC_a$ : 交差点が多いリンクで 1, それ以外で 0

$UT_{a|k}$ : Uターンダミー ( $a \rightarrow k$  で  $177^\circ$  以上のとき)

Uターンさせないように値を固定

(パラメータ初期値:  $\tilde{\beta}_{TT} = -2, \tilde{\beta}_{LT} = -1, \tilde{\beta}_{LC} = -1, \underline{\tilde{\beta}_{UT} = -20}$ )



# 推定実験

## 1. シミュレーションデータでのモデル推定 2. GPSデータを用いたパラメータ推定

- 10のODサンプルに対して500個の観測経路データを作成.
- 各ODに対して, 平均39(35~44)個の経路
- 旅行時間は, 平均9(8.8 ~ 12.3)分
- 経路データの合計5000個のうち, 0.7%がループを含む経路

Sample	$\hat{\beta}_{TT}$	Std. err.	$\hat{\beta}_{LT}$	Std. err.	$\hat{\beta}_{LC}$	Std. err.
1	-1.91	0.21	-1.02	0.09	-1.07	0.06
2	-1.97	0.22	-0.99	0.09	-1.04	0.06
3	-1.80	0.21	-1.09	0.09	-1.07	0.06
4	-2.38	0.26	-0.88	0.09	-1.01	0.06
5	-2.20	0.24	-0.96	0.08	-0.93	0.05
6	-2.30	0.26	-0.96	0.09	-0.96	0.06
7	-1.69	0.18	-1.00	0.08	-1.11	0.06
8	-1.84	0.20	-1.04	0.08	-1.04	0.05
9	-2.40	0.29	-1.05	0.09	-0.89	0.06
10	-1.88	0.20	-0.99	0.08	-0.976	0.05
Average	-2.04	0.23	-1.00	0.09	-1.01	0.06
Std. err.	0.26		0.06		0.07	

$\hat{\beta}_{UT}$  is fixed to -20.

モデルの正しさを確認

$$v(a|k) = \beta_{TT}TT_a + \beta_{LT}LT_{a|k} + \beta_{LC}LC_a + \beta_{UT}UT_{a|k} \quad (18)$$

(パラメータ初期値:  $\tilde{\beta}_{TT} = -2, \tilde{\beta}_{LT} = -1, \tilde{\beta}_{LC} = -1, \tilde{\beta}_{UT} = -20$ )

# 推定実験

1. シミュレーションデータでのモデル推定
2. GPSデータを用いたパラメータ推定

- 200台の車から2年間で得られたGPSデータを用いる.
- データ処理後, 1832トリップ(少なくとも5つのリンクを含む)データで推定.
- 466の目的地と, 37000以上のリンク選択を確認.

	RL	RL with LS
$\hat{\beta}_{TT}$	-2.45	-3.20
Std. err.	0.06	0.06
t-test	-40.83	-52.59
$\hat{\beta}_{LT}$	-1.01	-1.11
Std. err.	0.03	0.03
t-test	-33.67	-31.90
$\hat{\beta}_{LC}$	-0.40	-0.32
Std. err.	0.01	0.01
t-test	-40.00	-21.98
$\hat{\beta}_{LS}$		-0.23
Std. err.		0.02
t-test		-13.20
$LL(\hat{\beta})$	7481.5	7213.2

合理的な結果

LS項を含めると,  
精度向上

$\hat{\beta}_{UT}$  is fixed to -20.

$$v(a|k) = \beta_{TT}TT_a + \beta_{LT}LT_{a|k} + \beta_{LC}LC_a + \beta_{UT}UT_{a|k} \quad (18)$$

# まとめ

---

- 選択肢集合に制約(経路列挙)のない経路選択モデルを提案
- リンクベース選択肢の動的な記述からはじめ、  
各経路の選択確率がMNL型で記述できることを示した
- PSに似たLink Sizeを導入し、重複のある経路の効用修正を図り、推定実験を通して効果的であることを示した。