吸収マルコフ過程による交通量配分理論

Theory of Traffic Assignment through Absorbing Markov Process

佐佐木 綱: 土木学会論文集, No. 121, pp. 28-32, 1965.

交通研B4　須賀 拓実

2019.4.25

目次

1. 概説

マクロにみると、車は各交差点で確率的に向きを変えて流れる

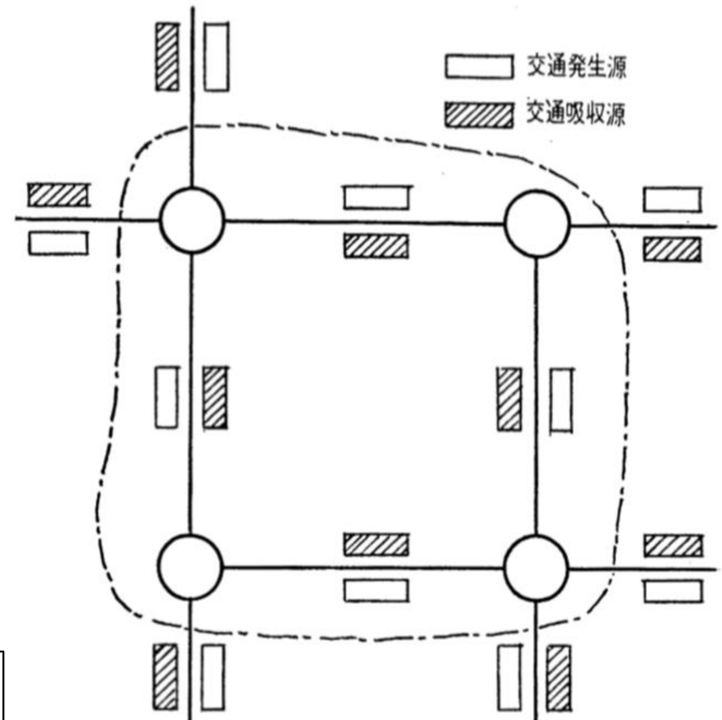
→吸収マルコフ連鎖と考えて交通量を求める

- マルコフ過程：未来の挙動が現在の値だけで決定され、過去の挙動と無関係であるという性質を持つ確率過程
- 確率過程：時間とともに変化する確率変数のこと
- マルコフ連鎖：マルコフ過程のうち、とりうる状態が離散的（有限または可算）なもの（離散状態マルコフ過程）

  時間が離散的なものを指すことが多い

同一方向で交差点に入る場合、どの車も直進率・右左折率が一定

図—1 街路網のモデル



各交差点間に1個ずつ発生源・吸収源
地域外：道路の背後地を代表する発生源・吸収源

発生交通量：単位時間に各発生源から発生する車の数
吸収交通量：単位時間に各吸収源が吸収する車の数

2. 吸収マルコフ連鎖の性質

- 吸収的な状態がr個、非吸収的な状態がs個

  →遷移確率行列を標準形の形で配置する

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

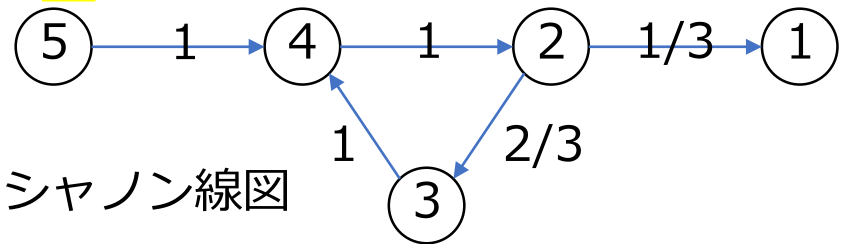
  - I:吸収状態の$r \times r$単位行列
  - Q:$s \times s$行列で非吸収状態相互の遷移確率行列
  - R:各交差点から吸収源への遷移確率行列
- 吸収マルコフ連鎖の基本行列：全ての固有値が−1より大きく1より小さい行列Qについて

$$I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$$

  - $(I-Q)^{-1}$のij要素はi地点を通った車がj地点を通る回数の期待値
- 各地点の発生交通量をu_iとすると、各地点を通る交通量は

$$(u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_s)(I-Q)^{-1}$$ で表される

例



シャノン線図

- $r = 1, s = 4$

2→3の遷移確率

- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & \boxed{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Q

- $(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \boxed{3} & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

地点4を通った車が地点3を通る回数の期待値

- 地点5のみから毎時5台出発するとき

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 5)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

各地点の発生交通量

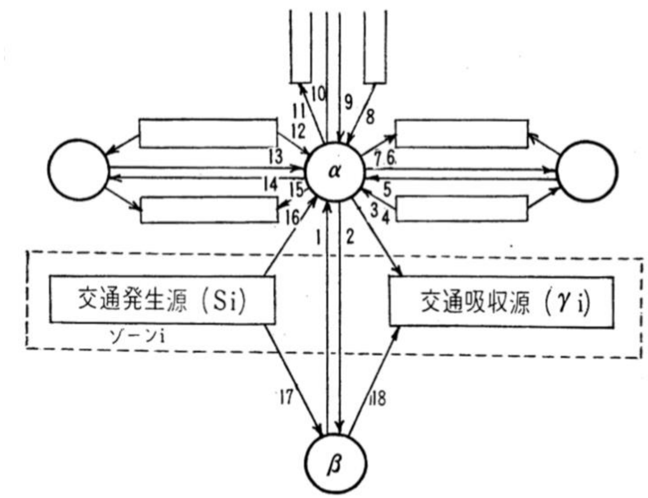
$$(15 \quad 10 \quad 15 \quad 5)$$

各地点の通過交通量

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

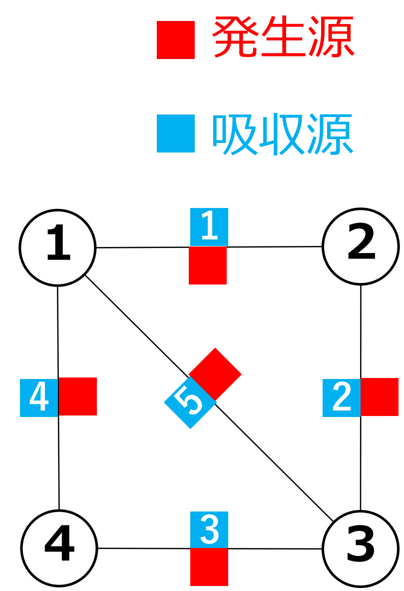
- 十字路では16の過渡状態、$r(=4)$ 個の発生源・吸収源
- 交差点における$(s-r)$個の過渡状態
- $s=6$（非吸収的状態ーα, β, 発生源x4）

図—4　交差点付近の詳細モデル



例

- 4個の交差点、5本の道
- 各交差点から各方面への遷移確率同じ、吸収率1/4



- $P=$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
1/12 & 1/12 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\
0 & 0 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\
1/8 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}
$$

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

条件1：各ゾーンの発生・吸収交通量は等しい

v_{r_i} :r_iに吸収される交通量
u_{s_i} :s_iから発生する交通量

- $(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}) = \big(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}, 0, 0, \cdots, 0\big)(I-Q)^{-1}R$
- $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & r & r-s \end{array} \\ \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & Q_1 \\ R_2 & 0 & Q_2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}r \\ \}r \\ \}s-r \end{array}$
- 条件1より $(u_{s_1} \quad u_{s_2} \quad \cdots \quad u_{s_r}) = (v_{r_1} \quad v_{r_2} \quad \cdots \quad v_{r_r})(=\boldsymbol{u}^*$とする$)$
- $S = (I-Q)^{-1}R$　とおくと　$S = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0{}' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \\ \}s-r \end{array}$

OD間の$r \times r$遷移行列

非吸収状態から吸収状態への遷移行列

各行の和が1の$s \times r$行列

- $\boldsymbol{u}^* = (\boldsymbol{u}^* \quad \boldsymbol{0})(I-Q)^{-1}R = (\boldsymbol{u}^* \quad \boldsymbol{0})\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^* P_0$
- $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0$の下では$P_0$と$\boldsymbol{u}^*$を独立に与えられない

　$\rightarrow u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_r}$ と連立させて各発生交通量u_{s_i}を求める

例

$S = (I-Q)^{-1}R$ に代入して

$r_2 \rightarrow s_3$の遷移確率

P_0

- $$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 0.583 & 0.967 & 1.083 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 1.083 & 0.967 & 0.583 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.967 & 1.083 & 1.367 & 0.583 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.967 & 0.583 & 1.367 & 1.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.333 & 0.667 & 1.333 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.733 & 0.667 & 0.933 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.933 & 0.667 & 1.733 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 0 & 0 & 1/12 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/8 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.187 & 0.153 & 0.216 & 0.194 \\ 0.187 & 0.249 & \boxed{0.216} & 0.153 & 0.194 \\ 0.153 & 0.216 & 0.249 & 0.187 & 0.194 \\ 0.216 & 0.153 & 0.187 & 0.249 & 0.194 \\ 0.194 & 0.194 & 0.194 & 0.194 & 0.222 \\ 0.228 & 0.228 & 0.161 & 0.161 & 0.222 \\ 0.146 & 0.271 & 0.271 & 0.146 & 0.167 \\ 0.161 & 0.161 & 0.228 & 0.228 & 0.222 \\ 0.271 & 0.146 & 0.146 & 0.271 & 0.167 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0$ と $u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_8}$ (uは発生交通量の合計)を連立させて解くと

$$u_{s_1} = u_{s_2} = \cdots = u_{s_5} = u/5$$

交差点4からの遷移確率

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

もう一つの考え方

- Nトリップ目の発生交通量は$N-1$トリップ目の吸収量に等しい

$$\boldsymbol{u}^*(N) = \boldsymbol{u}^*(N-1)\cdot P_0 = \boldsymbol{u}^*(0)\cdot P_0^N$$

- $N\to\infty$のとき、 P_0が正則と仮定するとP_0^Nは極限行列に近づく

$$\boldsymbol{u}^*(\infty) = \boldsymbol{u}^*(0)\cdot W, W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \end{pmatrix}$$

$$(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_r) = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_r)P_0$$

$$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r = 1$$

$$\therefore u_{s_1} = u\omega_1, u_{s_2} = u\omega_2, \cdots, u_{s_r} = u\omega_r$$

- ゾーンiの交通量はω_iと表される
- 各ゾーンの発生・吸収交通量の期待値が等しい

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

条件2：各発生源→任意の吸収源 の交通量がOD交通量を満たす

$$Q=\begin{pmatrix}0 & Q_1\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}, I-Q=\begin{pmatrix}I & -Q_1\\ 0 & I-Q_2\end{pmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix}I & Q_1(I-Q_2)^{-1}\\ 0 & (I-Q_2)^{-1}\end{pmatrix}$$

R_1（発生源から吸収源に直接行く交通量）は0

$(I-Q)^{-1}R=S$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}I & Q_1(I-Q_2)^{-1}\\ 0 & (I-Q_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ R_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0\\ P_0'\end{pmatrix}$$

$$\therefore Q_1(I-Q_2)^{-1}R_2=P_0, (I-Q_2)^{-1}R_2=P_0'$$

$$\therefore Q_1P_0'=P_0$$

- これをを満たすようにQ_1, Q_2, R_2を決めなければならない
- 各街路区間の交通量Xは $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{u}^*Q_1(I-Q_2)^{-1}$

$1\times(s-r)$の行ベクトル
各過渡状態の交通量

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

吸収マルコフ連鎖を実際に使うには

- $Q_1P_0' = P_0$ を満たすようにQ_1, Q_2, R_2を決めなければならない
- 交差点での観測資料に基づき遷移確率Pを決める
- ぐるぐる回る車が出るなど、このモデルでは実際の交通量以上に各街路に車が流れる
- 実際の交通量以上に配分される交通量の増大の程度を知る

$$\boldsymbol{\tau} = [I, Q_1(I - Q_2)^{-1}]\boldsymbol{\xi}$$

過渡状態の数だけ1が並ぶ列ベクトル

各発生源から出た交通が吸収されるまでの推移数の期待値を表す列ベクトル

- $\boldsymbol{\tau}$ に交差点間の平均所要時間をかけ、OD交通量のウェイトで加重平均すれば、トリップの平均所要時間が求まる
- 実際のトリップと比較し、マルコフ連鎖が適切かどうかを判断

4. 各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖と考える場合

- ほとんどの車は最短経路を選ぶ

→一つのマルコフ連鎖と考えると実際より交通量がかなり大きい

- 各ODの交通量をu_{s_i,r_j}として、一つのOD交通量に対して遷移行列P_{ij}を考えると、以下の式で各過渡状態の交通量が求められる

$$\begin{pmatrix} u_{s_i,r_j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}(I - Q_{ij})^{-1}$$

- 各ODに対して、この行列の第1行をとって順序良く並べ

$r(r-1)$行s列の行列Yを作ると、各過渡状態の交通量$\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}Y$

- $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_{s_1,r_2} & u_{s_1,r_3} & \cdots & u_{s_r,r_{r-1}} \end{pmatrix}$

課題

- ODごとのP_{ij}が他のOD交通量の経路選択に依存する場合
- ODごとにP_{ij}を観測できるか、理論的に与えられるか

5. 結論

- 交通量が非常に多ければ全体を一つのマルコフ連鎖と考えられる
- 遷移行列を考えることで右折禁止、一方通行の影響を求められる
- 全体を一つのマルコフ連鎖とみる考え方では各ODに最短経路に配分する考え方と対照的で、可能な最長経路まで残らず配分される
- 長期の交通量予測には総発生交通量uとゾーン間遷移行列P_0が必要

→ω_i, u_{s_i}を算出→Q_1, Q_2, R_2により街路網の交通量分布を求められる

- 計算が煩雑→大きなゾーンや主要交差点を取り上げて実際に適用