包絡分析法(DEA)
vs
確率フロンティア分析(SFA)

The technical efficiency of container ports: Comparing data envelopment analysis and stochastic frontier analysis, Culliname et.al (2005)

理論談話会　＃3

2019年5月10日（金）

米澤 実保

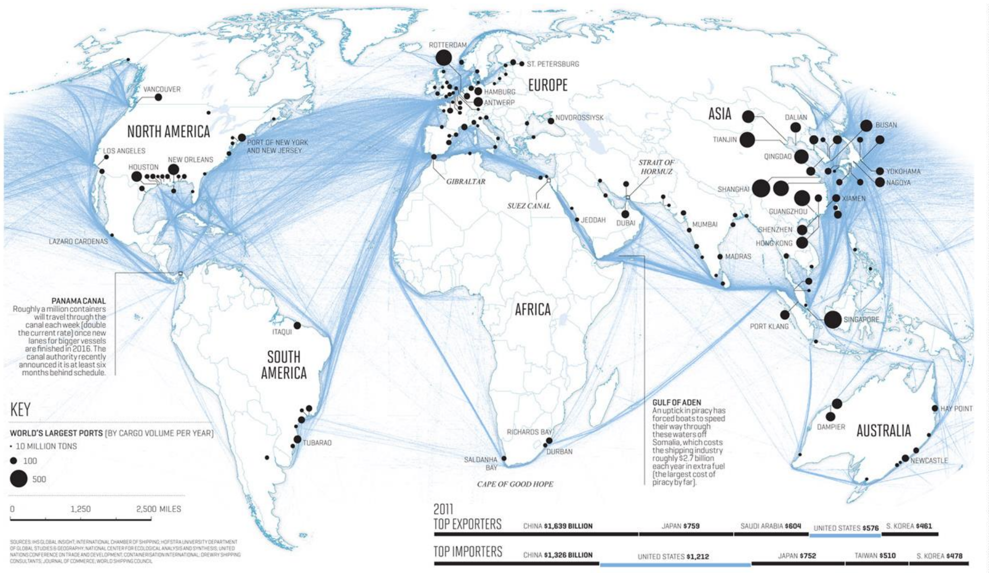
contents

- コンテナ港の効率性をテーマにして，効率性のはかり方として，包絡分析法(DEA)と確率フロンティア分析法(SFA)を行い，比較分析した

http://blog.livedoor.jp/igarashi_gri/archives/53889835.html

Introduction

- コンテナ港の生産効率性を評価したい
  - コンテナ港はグローバリゼーションや世界経済に対して重要な役割を担う
  - 現在は一つの港の中に複数企業がいることもあり，オペレーションが複雑
  - 従来は，コンテナ港の操作生産性の最適評価を個別に行っていたが総合的にコンテナ港の生産性を評価する方法はなかった
- 本研究では包絡分析法(DEA)と確率フロンティア分析(SFA)に着目して効率性を評価する．



画像引用https://www.vox.com/2014/8/26/6063749/38-maps-that-explain-the-global-economy

DEAとSFAの概要

包絡分析法(DEA)とは

- Data Envelopment Analysis
  - Charnes et al.(1978)で提案
  - 複数の入力/出力のDMU(Decision Making Unit：意思決定単位)の効率性を測る
  - 仮想入出力によって，事前に生産関数を定義しなくても評価ができる
  - DEAは収穫量一定のCCRモデルと規模が可変のBCCモデルに大別することができる
  - 入力指向型（入力を最小にする）・出力指向型（出力を最大にする）がある

  - 多入力・多出力を総合的に相対的に測れるのが利点

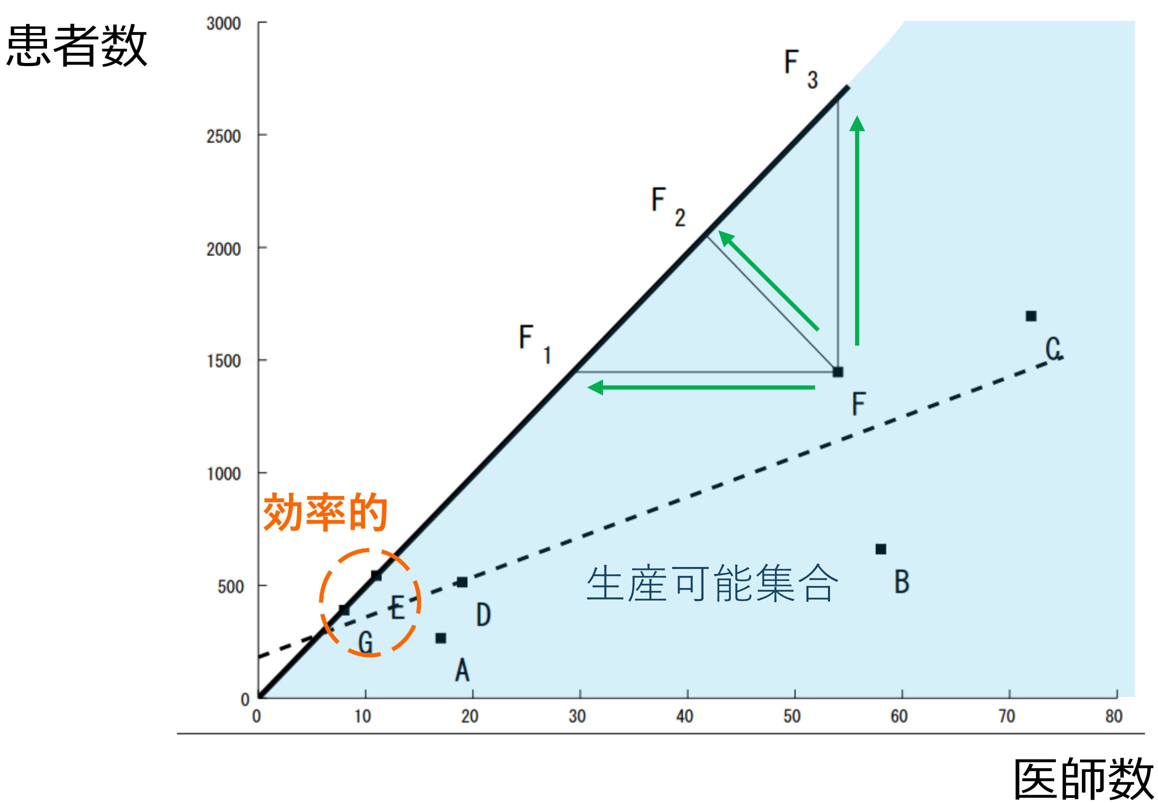
包絡分析法の例（1入力－1出力）

Q：　A-Gの病院の効率性を相対的に判断せよ

DMU：Decision Making Unit

病院	A	B	C	D	E	F	G
医師数	17	58	72	19	11	54	8
患者数	266	661	1,695	514	543	1,447	390

1.2 医師数と患者数．太い実線が効率的フロンティア，破線は回帰直線．



医師一人当たりの患者数が多いほど効率的とする

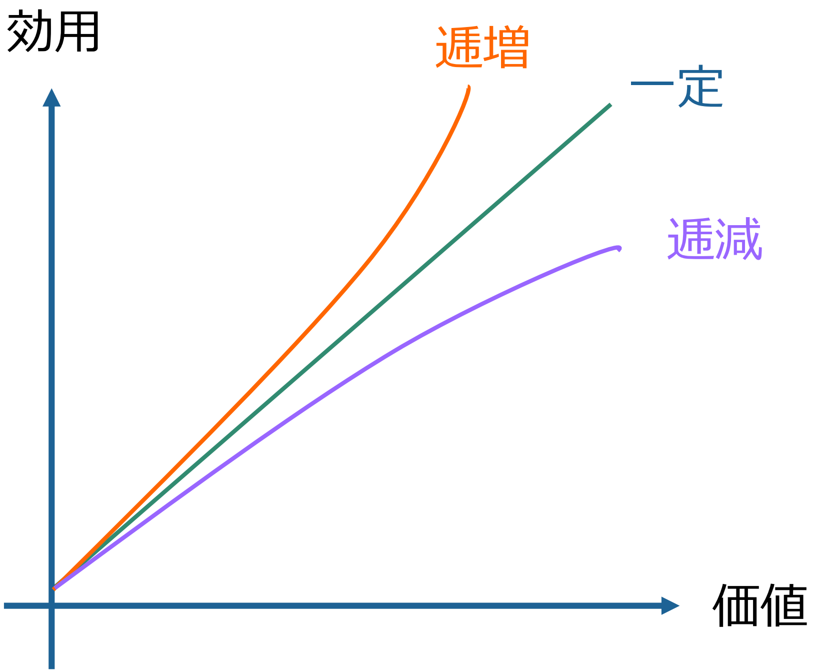
→傾きが大きいほど効率的

Fが効率的になるには，矢印の方向に医師/患者数を移動させればよい

最も基本的なDEAモデル（CCRモデル）

CCRモデル・BCCモデル

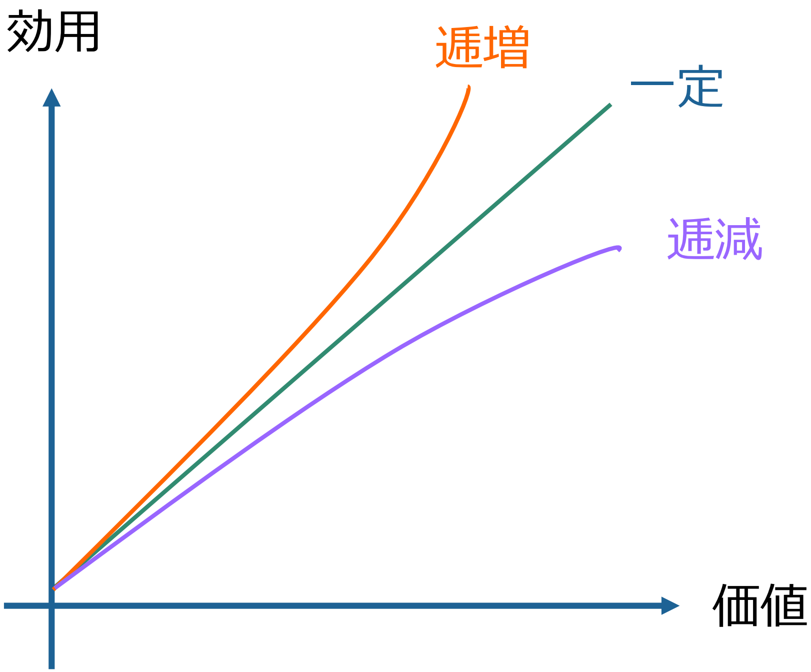
■ 収穫の規模が一定とは



- 規模が大きくなると効用も比例して増加するのか？

- 収穫の規模が一定
→CCRモデル
- 規模に応じて規模が変化
→BCCモデル

- 収穫の規模が一定とは

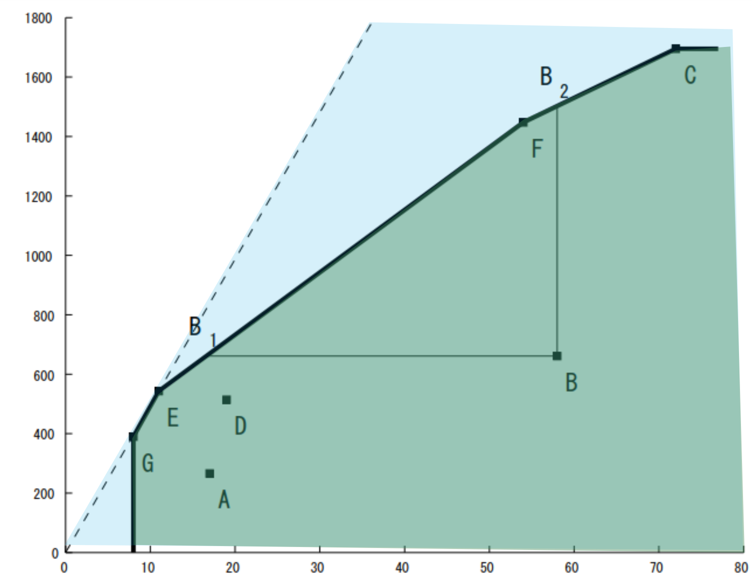


- 規模が大きくなると効用も比例して増加するのか？
- 収穫の規模が一定
→CCRモデル
- 規模に応じて規模が変化
→BCCモデル

前スライドの問題において、
水色がCCRモデル、緑色がBCCモデル

BCCモデルのほうが
生産可能集合が狭い

図表 4.3 BCC モデルの効率的フロンティア（破線は CCR モデルのフロンティア）



包絡分析法の例（2入力-2出力）

Q：　A-Gの病院の効率性を相対的に判断せよ

	病院	A	B	C	D	E	F	G
入力	医師数	17	58	72	19	11	54	8
	平均入院日数	15.5	29.1	15.8	20.4	19.2	13.1	24.9
出力	1日平均患者数	266	661	1695	514	543	1447	390
	医業収益(10億円)	2.30	5.60	9.79	2.68	2.21	11.05	1.82

- 例えば、病院Dに着目する

$$\text{病院 D の出力／入力} = \frac{514u_1 + 2.68u_2}{19v_1 + 20.4v_2} \quad \begin{matrix}\text{仮想出力}\\ \text{仮想入力}\end{matrix}$$

$$\max \frac{514u_1 + 2.68u_2}{19v_1 + 20.4v_2}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{266u_1 + 2.30u_2}{17v_1 + 15.5v_2} \le 1 \qquad \frac{543u_1 + 2.21u_2}{11v_1 + 19.2v_2} \le 1$$

$$\frac{661u_1 + 5.61u_2}{58v_1 + 29.1v_2} \le 1 \qquad \frac{1447u_1 + 11.04u_2}{54v_1 + 13.1v_2} \le 1$$

$$\frac{1695u_1 + 9.79u_2}{72v_1 + 15.8v_2} \le 1 \qquad \frac{390u_1 + 1.82u_2}{8v_1 + 24.9v_2} \le 1$$

$$\frac{514u_1 + 2.68u_2}{19v_1 + 20.4v_2} \le 1 \qquad u_1, u_2, v_1, v_2 \ge 0$$

これは分数計画問題。しかし、
分母をかけて右辺に移項すれば,
線形計画問題に.
ウェイトを求められる.

$$v_1 = 0.049, v_2 = 0.0038,$$
$$u_1 = 0.00028, u_2 = 0.205, \theta = 0.69$$

包絡分析法の例（2入力-2出力）

図表 4.8 最適なウェイトと入出力の比 (θ)

病院	A	B	C	D	E	F	G
v_1^* ($\times 10^{-2}$)	5.68	1.69	0	4.86	4.26	1.82	10.1
v_2^* ($\times 10^{-3}$)	2.25	0.669	63.3	3.80	27.7	1.42	7.87
u_1^* ($\times 10^{-4}$)	0	0	5.73	2.82	18.4	1.06	5.84
u_2^* ($\times 10^{-1}$)	2.80	0.834	0	2.05	0	0.767	4.24
θ^*	0.65	0.47	0.97	0.69	1	1	1

- 効率値が1になるものは効率的と判断される.

  ウェイトの取り方で効率性判定が変わってくる.
  効率性を判定する事業体に最も有利なように
  ウェイトを決定する. →DEAの特徴

- スラック解
  - パラメータが1になるものはさらに余剰/不足がないかを見る。スラック解を求める。これが0だと入力の余剰・出力の不足がないので効率となる

確率フロンティア分析(SFA)とは

- Aigner et al.(1977)とMeeusen and van den Broeck(1977)が提案
- パラメトリック関数が入力と出力の間に存在
- DEAとの違いは，技術的非効率だけでなく，外部のランダムショックの影響を出力に含めることができる

$$y_k = f(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{Mk}, U_k, V_k)$$

- 誤差項は以下の2つ

U_k：会社kの技術的非効率性（正の値をとる）
V_k：統計的ノイズ成分（正でも負でもよい）

- はじめに関数を決定する必要がある

コンテナ港の効率性分析

分析・データ概要

- 効率性の定義「入力を最小に，出力を最大に」
  - 現代のコンテナ港は，労働の集中よりは洗練された設備と情報技術によって成り立っている
  - この目的は，競争にさらされるコンテナ港にとって大事

- 使用データ
  - 2001年世界トップ30のコンテナ港を対象，このうちデータが得られた28のコンテナ港（57のコンテナターミナル）を分析した
    - 出典：Containerisation International Yearbook and Lloyd’s Ports of the World
  - 入力：ターミナルの長さ，ターミナルの面積，岸壁ガントリークレーンの数，ヤードガントリークレーンの数，ストラドルキャリアの数
  - 出力：コンテナ港スループット（TEU twenty-foot equivalent unit，20フィートコンテナ換算．貨物の容量を表す単位）

DEAの定式化

■ 定式化（出力指向型モデル）

$$\max_{U,\lambda} \quad U$$

Uを最大化する

$$\text{Subject to} \quad Uy'_k - Y'\lambda \leqslant 0$$

出力y_kをなるべく最大化する

$$X'\lambda - x'_k \leqslant 0$$

入力x_kの入力値は維持

$$\lambda \geqslant 0 \text{ (DEA-CCR)}$$

λはウェイト（非負のベクトル）

$$e\lambda' = 1 \text{ (DEA-BCC)}$$

eは成分1の行ベクトル

- k番目のDMUの出力由来の技術効率性の指標

$$\mathrm{TE}_k = 1/U_k$$

- 規模の効率性

$$\mathrm{SE}_k = U_{\mathrm{CCR}\_k}/U_{\mathrm{BCC}\_k}$$

BCCモデルのほうがCCRモデルよりも制限が大きいので両者の比を規模の効率性SE_kと呼ぶ
$\mathrm{SE}_k=1$なら効率、1未満だと非効率

SEが1でないとき（規模の非効率性）は、さらに規模の増加・減少によるものに分けられる。CCRモデルによってeλが1より大きければ減少、小さければ増加となる

- SFA
  - 対数線形コブダグラス関数を仮定

$$\ln Y_k = \beta_0 + \beta_1 \ln \mathrm{TL}_k + \beta_2 \ln \mathrm{TA}_k + \beta_3 \ln \mathrm{QG}_k + \beta_4 \ln \mathrm{YG}_k + \beta_5 \ln \mathrm{SC}_k + v_k - u_k$$

岸壁の長さ　ヤードの面積　岸壁のガントリークレーンの数　ヤードのガントリークレーンの数　ストラドルキャリアの数

Β0～β5は係数、
v_kは統計ノイズ、 u_kは非効率の成分
（ u_k ≥0）

- SFAではu_kの分布を仮定する必要があり，今回は以下の4つの分布を使用
  - 指数分布
  - ガンマ分布
  - 半正規分布
  - トランケート正規分布
- SFAの式に入出力変数を代入すると誤差が分かり，u_kがわかる．
- 効率性は $\mathrm{U}_k = \exp(-u_k)$で求められる

実験結果の一部（DEA）

- 57のコンテナターミナルの結果（抜粋）

Table 3 (*continued*)

Port	Port/terminal	DEA-CCR	DEA-BCC	Scale efficiency	Returns to scale
Yokohama	Yokohama	0.3541	0.3796	0.9328	Decreasing
Laem Chabang	Laem Chabang	1.0000	1.0000	1.0000	Constant
Tanjunk Priok	Tanjunk Priok	0.5493	0.7771	0.7069	Decreasing
Algeciras	Algeciras	0.9022	1.0000	0.9022	Decreasing
Kobe	Kobe	0.2749	0.4694	0.5856	Decreasing
Nagoya	Nagoya	0.6037	0.6809	0.8866	Constant
	Kinjo Pier	0.4332	1.0000	0.4332	Increasing
	NCB	0.9267	1.0000	0.9267	Increasing
Keelung	Keelung	1.0000	1.0000	1.0000	Constant
Colombo	Colombo	1.0000	1.0000	1.0000	Constant
Average		0.5759	0.7382	0.7831	

[a] Alternative efficiency results and returns to scale are calculated by Eqs. (1)–(7). The estimates presented here are based on output-orientated DEA-CCR and DEA-BCC models.

- 効率値：CCRモデルの平均は0.58＜＝BCCモデルの平均は0.74
- 効率と判断されたのはCCRモデルで9港、BCCモデルで22港
- 2つのモデルの相関は0.8であり同傾向

実験結果の一部（SFA）

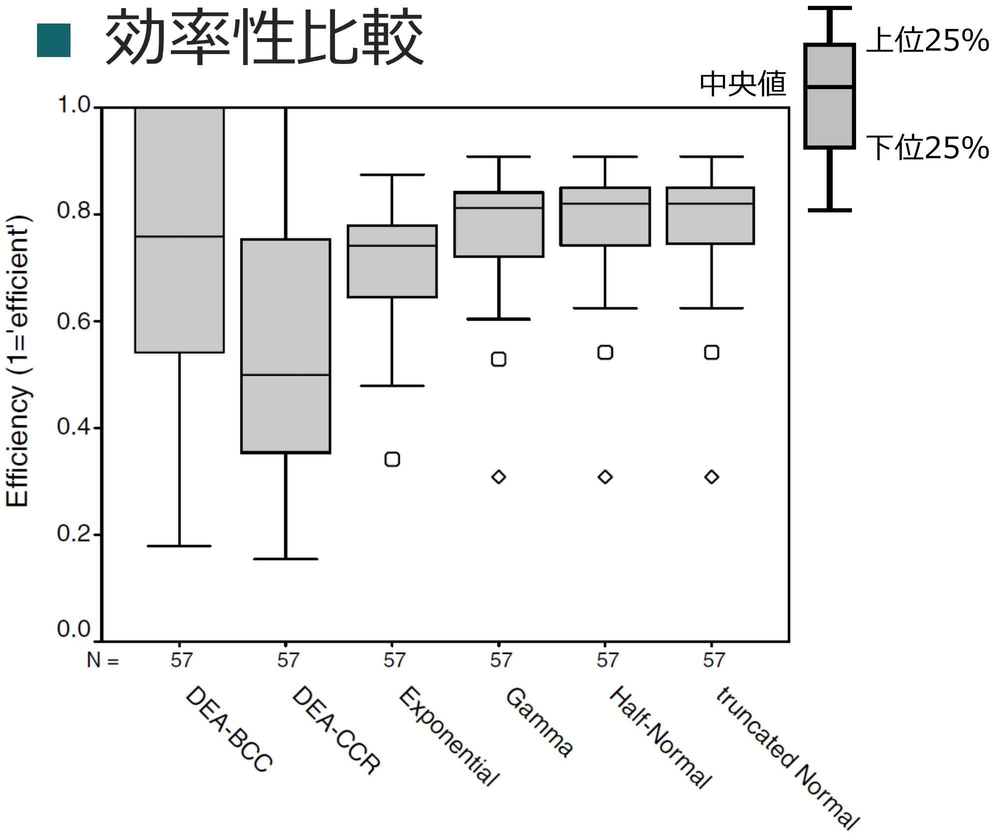
- 57のコンテナターミナルの結果（抜粋）

Table 5 (*continued*)

Port	Port/terminal	Half-normal	Truncated normal	Exponential	Gamma
Yokohama	Yokohama	0.6762	0.6770	0.5855	0.6601
Laem Chabang	Laem Chabang	0.9089	0.9091	0.8760	0.8909
Tanjunk Priok	Tanjunk Priok	0.8573	0.8577	0.7934	0.8553
Algeciras	Algeciras	0.9038	0.9040	0.8675	0.8910
Kobe	Kobe	0.6236	0.6242	0.5425	0.6061
Nagoya	Nagoya	0.8335	0.8339	0.7620	0.8143
	Kinjo Pier	0.6840	0.6849	0.5895	0.6598
	NCB	0.8543	0.8547	0.7900	0.8448
Keelung	Keelung	0.8557	0.8561	0.7946	0.8544
Colombo	Colombo	0.7857	0.7864	0.6946	0.7763
Average		0.7900	0.7905	0.7157	0.7785

評価手法の考察

■ 効率性比較



- 効率性の分散はSFAのほうが小さい
- DEA-CCRが一番小さい
- SFA-exponentialを除いて，DEA-BCCよりもSFAのほうが効率性が大きい
- 6つの効率性に対して，分散分析をするとF=12.74（1%）
- 相関係数（下表）を見ると正の相関が高い

Spearman's rank order correlation coefficient

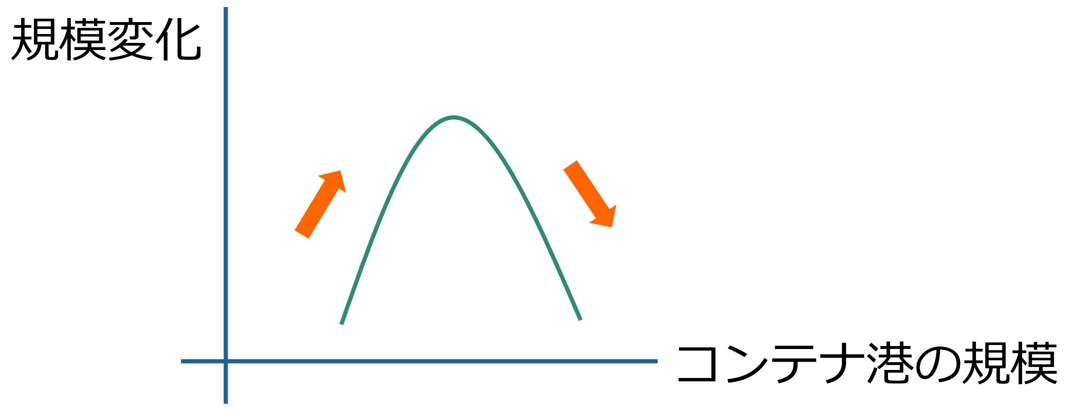
	DEA-CCR	DEA-BCC	Half-normal	Truncated normal	Exponential	Gamma
DEA-CCR	1					
DEA-BCC	0.7985	1				
Half-normal	0.7993	0.6393	1			
Truncated-normal	0.7957	0.6382	1.0000	1		
Exponential	0.8002	0.6437	0.9989	0.9989	1	
Gamma	0.7851	0.6276	0.9772	0.9768	0.9779	1

コンテナ港間の効率性比較

- 今回の手法は非効率の原因を特定はしないが、DMUごとに比較ができる
- 分布を見ると、民間セクターが参入しているほうが公営セクターよりも効率性が良い
- 積み替え港のほうが、ゲートウェイ港よりも技術的・規模の効率性が良い→ハブ港のほうが支線港よりも効率が良いということがわかる
- 資源が乏しい港は効率が低い傾向にある
→都市港が効率の面では価値が高いということが推察される

規模の経済性についての考察

- 57の港のうち、13が規模に対して収穫一定、10が規模に対して収穫逓増、34が規模に対して収穫逓減
- 規模の効率性が非効率なものに関して、（ひとつをのぞいて）大きな港（年間コンテナ処理量1000万以上の港）は規模に対して収穫逓減
- 一方、年間コンテナ処理量1000万以下の港で規模の効率性が非効率なものは規模逓増：逓減＝4：1
- したがって港の規模が大きくなると、規模の効率性に限界が来る、小さい港はある程度までは規模を大きくすると規模が一定になることが推察される



結論

- コンテナ港のデータについて，DEAとSFAの2つのアプローチで効率性を分析した
  （DEAは出力由来で、SFAはコブダグラス生産関数を用いた）
- 効率値の値を比べると、DEA-CCRモデルが効率値が低くなった。SFAのトランケート・指数・ガンマ分布はDEA-BCCモデルよりも効率値が大きくなった
  （上記の6つの解析は互いに相関が高いことが分かった）

- コンテナ港に対して手法を適用することで、コンテナ港の効率性を、規模も含めて明らかにした
- 今回用いた手法で港湾政策の意思決定が定量的に可能になる

おまけ

スラック解の求め方

- パラメータ値を求めた後に

$$d_i^x = \theta^* x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j{}^* x_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$d_r^y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j{}^* y_{rj} - y_{rk} \qquad (r = 1, 2, \cdots, s)$$

Θ=1となった場合，入力の余剰や出力の不足がありうる

d_i^xはi番目の入力に対する余剰，d_r^yはr番目の出力に対する不足をあらわす．

- スラック解は以下の最大化問題を解くことで求められる

$$\begin{aligned}
&\max && \sum_{i=1}^{m} d_i^x + \sum_{r=1}^{s} d_i^y && \\
&\text{subject to} && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + d_i^x = \theta^* x_{ik} && (i = 1, 2, \cdots, m) \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - d_i^y = y_{rk} && (r = 1, 2, \cdots, s) \\
& && \lambda_j \geq 0 && (j = 1, 2, \cdots, n) \\
& && d_i^x \geq 0 && (i = 1, 2, \cdots, m) \\
& && d_r^y \geq 0 && (r = 1, 2, \cdots, s)
\end{aligned}$$

コンテナ港の設備

- ガントリークレーン

- ストラドルキャリア