理論談話会 #9

Hara, Y., Hato, E., Transportation Research Part B, Vol. 117, pp. 723-739, 2018.

A car sharing auction with temporal-spatial OD connection conditions

B4 渡邉 葵

目次

<u>目標</u>

- シェアリングのおけるオークションの利用について理解する
- 最適化問題にまつわる知識(双対性，LP緩和など)を確認する

1. 要旨

1. 要旨

- **カーシェアリングにおける利用権取引制度(オークション)**
  - 車両の需給の時空間的なミスマッチを解消

- **VCGメカニズムを援用**
  - 真の評価値を正直に申告することが支配戦略(strategy-proof)
  - 効率的な資源配分を達成
  - 双対問題を考えることで支払い価格の意味を経済学的に解釈可能

- **勝者決定問題のNP困難性への対処**
  - 単一入札：LP緩和
  - 複数入札：切除平面法＋分枝限定法

2. 背景

2. 背景

◆ One-way型シェアリングシステムの課題

車両の需給の時空間的なミスマッチ

ODの偏り → 車両が集中するノード／車両が過疎になるノード → 使いたいのに使えない…

◆ 対処法

- 事業者が車両を再配置 → 運営コストの増加
- <u>インセンティブを与えて車両の再配置を促す</u> → **利用権オークション**

◆ 利用権オークション：市場原理により利用者の異質性や情報の非対称性を解消

<u>ポイント</u>

(1) 真の評価値を表明してもらう(**strategy-proof**) → VCGメカニズム

(2) オークション**勝者決定問題のNP困難性**

VCGメカニズムを利用した利用権オークションにより，複数の個人の移動を自律的に，時空間的に接続する

3. 問題設定

3. 問題設定

◆ 文字の定義

User ID	OD	value (t = 1)	value (t = 2)	value (t = 3)
A	1→2	90	80	70
B	1→2	60	70	80
C	2→1	70	80	70
D	2→3	70	60	50
E	3→1	50	60	70

ODペア ノード数N, リンク数L
Time slot t（各トリップは時間tで完結）
車両数 μ
ユーザ $i \in I$

$v_{pq}^{i}(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**評価値**

$$\boldsymbol{v} = \{v_{11}^{1}(1), v_{12}^{1}(1), \cdots, v_{NN}^{1}(1), v_{11}^{1}(2), \cdots, v_{NN}^{1}(T), \cdots, v_{pq}^{i}(t), \cdots\} \qquad |N| \times |N| \times |T| \times |I|$$

$x_{pq}^{i}(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**利用権有無**

$$x_{pq}^{i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{利用権なし} \\ 0 & \text{利用権あり} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \{x_{11}^{1}(1), x_{12}^{1}(1), \cdots, x_{NN}^{1}(1), x_{11}^{1}(2), \cdots, x_{NN}^{1}(T), \cdots, x_{pq}^{i}(t), \cdots\} \qquad |N| \times |N| \times |T| \times |I|$$

3. 問題設定

◆ 目的関数：社会的余剰最大化

$$\max_x \sum_{i\in I}\sum_{t\in T}\sum_{pq\in L} v_{pq}^i(t)\cdot x_{pq}^i(t)$$

ODペア	ノード数N，リンク数L
Time slot	t（各トリップは時間tで完結）
車両数	μ
ユーザ	$i \in I$

$v_{pq}^i(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**評価値**

$x_{pq}^i(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**利用権有無**

◆ 制約条件1：ユーザは1日最大1トリップ(仮定)

$$\sum_{t\in T}\sum_{pq\in L} x_{pq}^i(t) \le 1 \qquad \forall i \in I$$

◆ 制約条件2：**時空間接続条件**(車両数保存則)

$$\underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x_{pq}^i(t-1)}_{\text{ノード}q\text{に来た車両数}} + \underbrace{x_{qq}^S(t-1)}_{\text{ノード}q\text{にプールされていた車両数}} = \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x_{qp}^i(t)}_{\text{ノード}q\text{を出る車両数}} + \underbrace{x_{qq}^S(t)}_{\text{ノード}q\text{にプールされている車両数}} \qquad t = 2,\cdots,T,\ \forall q \in N$$

◆ 制約条件3：**車両数制約**

$$\underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x_{pq}^i(t)}_{\text{移動する車両数}} + \underbrace{\sum_{q\in N} x_{qq}^S(t)}_{\text{プールされている車両数}} = \mu$$

時空間接続条件を考えると，
$t = 1$で成立していれば十分

$$\sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x_{pq}^i(1) + \sum_{q\in N} x_{qq}^S(1) = \mu$$

3. 問題設定

◆ 最適化問題

[SO]

$$\max_{x} \sum_{i\in I} \sum_{t\in T} \sum_{pq\in L} v^i_{pq}(t) \cdot x^i_{pq}(t)$$

ODペア	ノード数N, リンク数L
Time slot	t（各トリップは時間tで完結）
車両数	μ
ユーザ	$i \in I$

$v^i_{pq}(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**評価値**

$x^i_{pq}(t)$ ユーザiの時刻tにおけるODペア$p \to q$ の**利用権有無**

$s.t.$

車両数制約 $$\sum_{i\in I} \sum_{pq\in L} x^i_{pq}(1) + \sum_{q\in N} x^S_{qq}(1) = \mu$$

時空間接続条件 $$-\sum_{i\in I} \sum_{p\in N} x^i_{pq}(t-1) - x^S_{qq}(t-1) + \sum_{i\in I} \sum_{p\in N} x^i_{qp}(t) + x^S_{qq}(t) = 0 \qquad t = 2, \cdots, T, \ \forall q \in N$$

1人1トリップ $$\sum_{t\in T} \sum_{pq\in L} x^i_{pq}(t) \le 1 \qquad \forall i \in I$$

利用権有無 $$x^i_{pq}(t) \in 0, 1 \qquad \forall i \in I, \ \forall pq \in L, \ \forall t \in T$$

車両数は整数 $$x^S_{qq}(t) \in N \qquad \forall q \in N, \ \forall t \in T$$

◆ ポイント

(1) **真の評価値を表明してもらう**(strategy-proof) → **VCGメカニズム**
(2) オークション**勝者決定問題のNP困難性** → 単一入札と複数入札による数理的性質の違い

4. シェアリングにおけるVCGメカニズム

4. シェアリングにおけるVCGメカニズム

◆ VCGメカニズム

長所

1. 効率性(efficiency) → 実現する利用権割り当ては社会的余剰を最大化
2. 耐戦略性(strategy-proof) → 各利用者は自身の評価値を正直に入札するインセンティブがある

▼ 証明は補足

手続き

1. 全ユーザが利用しうるすべての利用権に入札
2. 制約(車両数制約，時空間接続条件)下で，入札値の和が最大になるように利用権割り当て**【勝者決定問題】**
3. 落札者が利用権獲得．支払価格は，自分が入札することで生じる他者の社会的余剰の減少分**【Vickrey paymentの計算】**

支払価格 $P^i(\boldsymbol{v}) = \mathrm{W}(0, \boldsymbol{v}^{-1}) - W^{-i}(\boldsymbol{v})$

ユーザiがいない場合における，
[SO]での落札者の評価値の合計

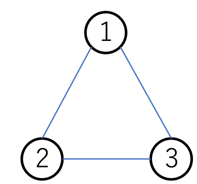
[SO]におけるユーザi以外
の落札者の評価値の合計

例

ユーザ	OD	t=1	t=2	t=3
A	1→2	$\boxed{90}$	80	70
B	1→2	60	70	$\boxed{80}$
C	2→1	70	$\boxed{80}$	70
D	2→3	70	60	50
E	3→1	50	60	70

ユーザ	OD	t=1	t=2	t=3
~~A~~	~~1→2~~	~~$\boxed{90}$~~	~~80~~	~~70~~
B	1→2	60	70	$\boxed{80}$
C	2→1	70	$\boxed{80}$	70
D	2→3	$\boxed{70}$	60	50
E	3→1	50	$\boxed{60}$	70

ユーザAがいない場合



社会的余剰 $90 + 80 + 80 = 250$

$P^A(\boldsymbol{v}) = (70 + 60 + 80) - (80 + 80) = 50$
$P^B(\boldsymbol{v}) = (90 + 60 + 70) - (90 + 80) = 50$
$P^C(\boldsymbol{v}) = (90 + 60 + 70) - (90 + 80) = 50$

5. オークションにおける勝者決定問題

5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 勝者決定問題

組み合わせ最適化：NP困難 → 単一入札と複数入札で解法が変わる

単一入札：各ユーザは，ただひとつの時間帯の利用権にのみ入札
複数入札：各ユーザは，同一ODに対して，複数の時間帯の利用権に同時に入札できる

		複数入札			単一入札		
agent ID	OD	$v(t=1)$	$v(t=2)$	$v(t=3)$	$v(t=1)$	$v(t=2)$	$v(t=3)$
1	$1 \to 2$	41	31	21	41	-	-
2	$1 \to 2$	25	30	20	-	30	-
3	$1 \to 2$	27	32	37	-	-	37
4	$1 \to 3$	89	79	69	89	-	-
5	$1 \to 3$	88	93	83	-	93	-
6	$1 \to 3$	70	75	65	-	75	-
7	$1 \to 3$	52	57	62	-	-	62
8	$2 \to 1$	93	83	73	93	-	-
9	$2 \to 1$	61	66	56	-	66	-
10	$2 \to 1$	83	88	93	-	-	93
11	$2 \to 3$	76	66	56	76	-	-
12	$2 \to 3$	78	83	73	-	83	-
13	$2 \to 3$	87	92	97	-	-	97
14	$2 \to 3$	75	80	85	-	-	85
15	$3 \to 1$	97	87	77	97	-	-
16	$3 \to 1$	73	78	68	-	78	-
17	$3 \to 1$	88	93	98	-	-	98
18	$3 \to 1$	75	80	85	-	-	85
19	$3 \to 2$	99	89	79	99	-	-
20	$3 \to 2$	82	72	62	82	-	-
21	$3 \to 2$	86	91	81	-	91	-
22	$3 \to 2$	59	64	69	-	-	69

5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 単一入札の勝者決定問題の解法

➢ **[SO]の書き換え**(単一入札だと変数の数を減らせる)

- $v_{pq}^{i}(t) \rightarrow v_{p^iq^i}^{i}(t^i)$ ユーザiの時刻t^iにおけるODペア$p^i \rightarrow q^i$の**評価値**

$$\boldsymbol{v} = \{v_{p^1q^1}^{1}(t^1), v_{p^2q^2}^{2}(t^2), \cdots, v_{p^Iq^I}^{I}(t^I), v_{11}^{S}(1), v_{22}^{S}(1), \cdots, v_{NN}^{S}(T)\} \qquad |I| + |N| \times |T|$$

$\boldsymbol{v}^S = \boldsymbol{0}$

- $x_{pq}^{i}(t) \rightarrow x_{p^iq^i}^{i}(t^i)$ ユーザiの時刻t^iにおけるODペア$p^i \rightarrow q^i$の**利用権有無**

$$\boldsymbol{x} = \{x_{p^1q^1}^{1}(t^1), x_{p^2q^2}^{2}(t^2), \cdots, x_{p^Iq^I}^{I}(t^I), x_{11}^{S}(1), x_{22}^{S}(1), \cdots, x_{NN}^{S}(T)\} \qquad |I| + |N| \times |T|$$

$\boldsymbol{x}^S$：プールされている車両数

➢ **[SO] → [SO-SMB]** (制約条件も減らせる)

$$\max_{x} \sum_{i\in I}\sum_{t\in T}\sum_{pq\in L} v_{pq}^{i}(t) \cdot x_{pq}^{i}(t)$$

$s.t.$

$$\sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x_{pq}^{i}(1) + \sum_{q\in N} x_{qq}^{S}(1) = \mu$$

$$-\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x_{pq}^{i}(t-1) - x_{qq}^{S}(t-1) + \sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x_{qp}^{i}(t) + x_{qq}^{S}(t) = 0 \qquad t = 2, \cdots, T,\ \forall q \in N$$

$$\cancel{\sum_{t\in T}\sum_{pq\in L} x_{pq}^{i}(t) \leq 1 \qquad \forall i \in I}$$

1人1トリップ条件不要

$$x_{pq}^{i}(t) \in 0, 1 \qquad \forall i \in I,\ \forall pq \in L,\ \forall t \in T$$

$$x_{qq}^{S}(t) \in N \qquad \forall q \in N,\ \forall t \in T$$

5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 単一入札の勝者決定問題の解法

➢ **LP緩和：[SO-SMB]→[SO-SMB-LP]**

（行列表現）

$$\max_{x} \sum_{i\in I}\sum_{t}\sum_{pq\in L} v^i_{p^iq^i}(t^i)x^i_{p^iq^i}(t^i) \longrightarrow \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}$$

$s.t.$

$$\sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x^i_{p^iq^i}(1) + \sum_{q\in N} x^S_{qq}(1) = \mu$$ 車両数制約

時空間接続条件

$$-\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^i_{p^1q^1}(t-1) - x^S_{qq}(t-1) + \sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^i_{q^ip^i}(t) + x^S_{qq}(t) = 0 \qquad t = 2,\cdots,T,\ \forall q\in N$$

$s.t.$

$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ $\quad \mathbf{b}^T = (\underbrace{\mu}_{1}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{|N|(|T|-1)}, \underbrace{1,\ldots,1}_{|I|})$

制約条件行列

$$\cancel{x^i_{p^iq^i}(t^i) \in 0,1 \qquad \forall i\in I,\ \forall pq\in L,\ \forall t\in T}$$

$$\cancel{x^S_{qq}(t) \in N \qquad \forall q\in N,\ \forall t\in T}$$

LP緩和 ⟶ $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$

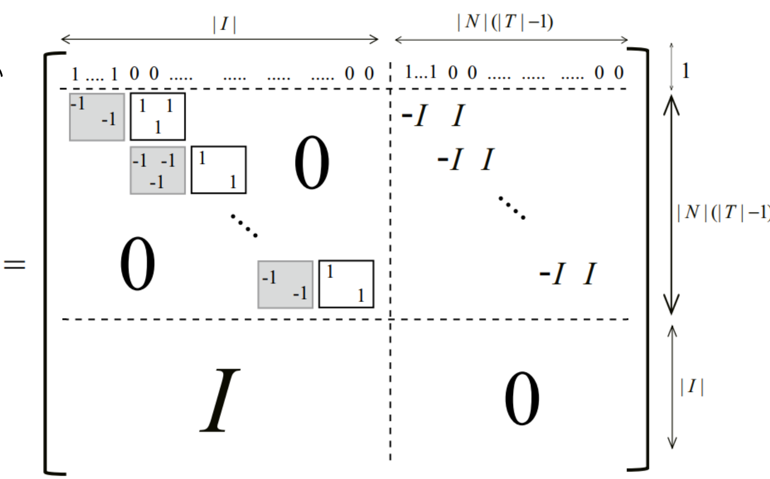
整数制約を取り除き，組み合わせ最適問題を線形計画問題に -----▶ 解は一致するの？

➢ **LP緩和問題と元問題の解の一致性**

Th. 制約条件行列が<u>全ユニモジュラ行列</u>であれば，LP緩和問題の解は整数解 → LP緩和問題を解けばよい

全ユニモジュラ行列：すべての正方部分行列がユニモジュラ行列(整数行列で行列式が0か+1か-1)

Prop. 単一入札[SO-SMB]のLP緩和問題[SO-SMB-LP]の制約条件行列Aは<u>全ユニモジュラ行列</u> ▼ 証明は補足

$A =$ 

◆ 単一入札であれば，LP緩和問題を解けばよい！

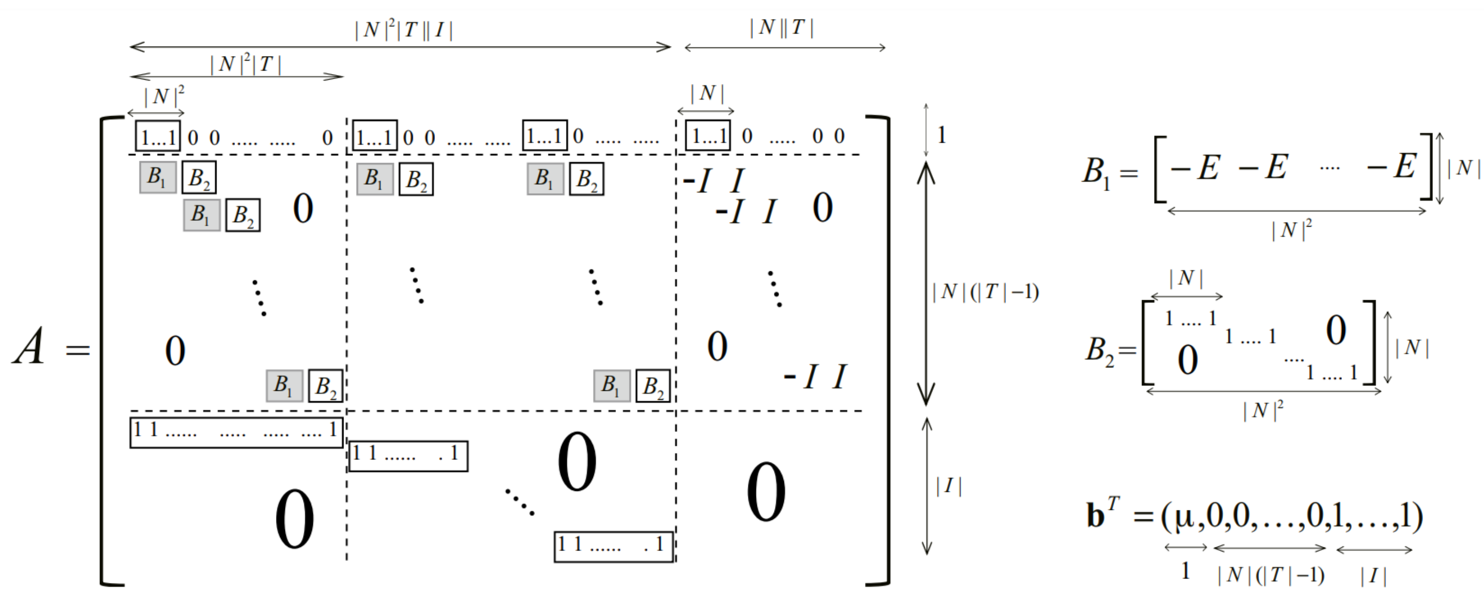
5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 複数入札の勝者決定問題の解法　▽詳細は後述

- 単一入札：LP緩和問題[SO-SMB-LP]の解＝元問題の解　∵制約条件行列Aが全ユニモジュラ行列
- 複数入札：LP緩和問題[SO-LP]の制約条件行列Aが全ユニモジュラ行列**ではない**

▼ 証明は補足

- LP緩和問題が整数解を持つとは限らない
- 双対問題を利用して強い制約条件を追加し，新たなLP緩和問題を生成して最適解を求める



I: The identity matrix of demension $|N|$.

5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 双対問題と利用権価格の解釈

[SO-SMB-LP]

＜主問題＞ ⟷ ＜双対問題＞

$$\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$$

$s.t.$

$$\begin{cases} \mathrm{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$\min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{b}^t \cdot \boldsymbol{y}$$

$s.t.$

$$\mathrm{A}^t \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases} \sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x^i_{p^i q^i}(1) + \sum_{q\in N} x^S_{qq}(1) = \mu \\ -\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^i_{p^1 q^1}(t-1) - x^S_{qq}(t-1) + \sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^i_{q^i p^i}(t) + x^S_{qq}(t) = 0 \qquad t = 2,\cdots,T,\ \forall q \in N \\ x^i_{p^i q^i}(t^i) \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} = (P(1), P_1(2), \cdots, P_N(T), u^1, \cdots, u^I)$$ 双対変数

$$\boldsymbol{x} = \{x^1_{p^1q^1}(t^1), x^2_{p^2q^2}(t^2), \cdots, x^I_{p^Iq^I}(t^I), x^S_{11}(1), x^S_{22}(1), \cdots, x^S_{NN}(T)\}$$

$$\boldsymbol{v} = \{v^1_{p^1q^1}(t^1), v^2_{p^2q^2}(t^2), \cdots, v^I_{p^Iq^I}(t^I), v^S_{11}(1), v^S_{22}(1), \cdots, v^S_{NN}(T)\}$$

$$\mathbf{b}^T = (\underbrace{\mu}_{1}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{|N|(|T|-1)}, \underbrace{1,\ldots,1}_{|I|})$$

5. オークションにおける勝者決定問題

◆ 双対問題と利用権価格の解釈

[SO-SMB-LP]

双対問題を書き下すと…

プロバイダの収益　ユーザの効用

$$\min_{P(1),\boldsymbol{u}} \boxed{\mu \cdot P(1)} + \boxed{\sum_{i \in I} u^i}$$

$s.t.$

$$\boxed{P_{p^i}(t^i) - P_{q^i}(t^i+1) + u^i \geq v^i, \qquad \forall i \in I}$$

$$P(1) - P_q(2) \geq 0, \qquad \forall q \in N$$

$$P_p(t-1) - P_q(t) \geq 0, \qquad \forall p, q \in N, t = 3, \ldots T$$

$$\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}.$$

効用　評価値　利用権価格

$$\boxed{u^i} \geq \boxed{v^i} - \boxed{\left(P_{p^i}(t^i) - P_{q^i}(t^i+1)\right)}$$

➢ **利用権価格の解釈**

利用権価格：

$$P_{pq}(t) = P_p(t) - P_q(t+1)$$

時刻tでのpの出発価格 - 時刻$t+1$でのqの到着価格

ノードqに着いたときに次のユーザから受け取る

- プロバイダは$t=1$における価格しか受け取らない
- $t=2$以降はユーザ間のマッチングのみが行われる

6. 解法と例

6. 解法と例

◆ 単一入札

LP緩和問題を解けばよく，線形計画問題なので，シンプレックス法や内点法が使える

◆ 複数入札　切除平面法＋分枝限定法

Step1. 問題[SO]をLP緩和した問題[SO-LP]を解く．得られた解$\boldsymbol{x}$が整数解であれば終了．そうでなければStep2へ．

Step2. LP緩和問題[SO-LP]の双対問題を解く．その解を$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{u})$とする．任意の$p,q,t$について，

$$u^i > v_{pq}^i(t) - \left(P_p(t) - P_q(t+1)\right) \Rightarrow \sum_{t\in T}\sum_{pq\in L} x_{pq}^i(t) = 0$$

として，強い制約式を追加し，Step1に戻る．そのようなiがない場合Step3へ

Step3.
1. Step1のLP緩和で得られた解$\boldsymbol{x}$のうち，整数以外の解$x_{pq}^i(t)$に対して，それぞれについて，$x_{pq}^i(t)=1$を追加した子問題，$x_{pq}^i(t)=0$を追加した子問題を作成し，LP緩和問題を解く．
2. 子問題の解で整数以外の解をもつとき，さらに場合分けした子問題を作成し，順次解を求める．
3. 最も下層のすべての子問題が整数解のみを持つとき，子問題の作成を終了する．
4. 解が整数解のみで構成される子問題の中で，目的関数の値が最大となる子問題の解が，元問題の解である．

6. 解法と例

◆ 計算例

▼ 有限の時間で計算できる

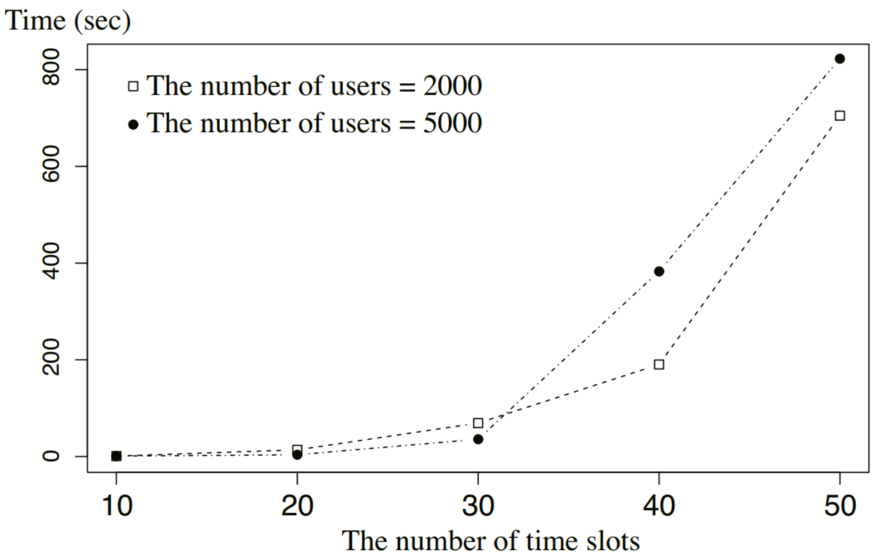


Fig. 6. Computational Times of numerical examples.

▼ プロバイダ側が何の介入もしない場合に比べて，入札オークションの方が社会厚生が高まる

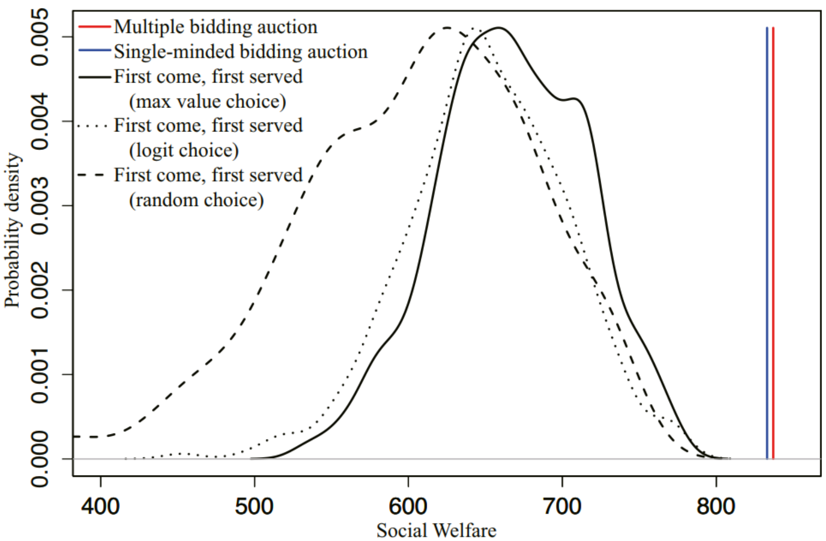


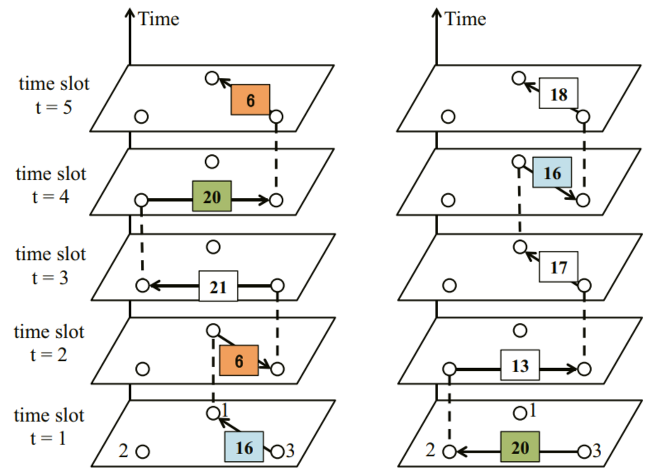
Fig. 7. Efficiency of mobility sharing auction and first come, first serve rule.

6. 解法と例

◆ 計算例

▼往復トリップがある場合も計算可能

agent ID	OD	$v(t=1)$	$v(t=2)$	$v(t=3)$	$v(t=4)$	$v(t=5)$
1	1 → 2	41	31	21	0	0
$(k_1=2)$	2 → 1	0	0	24	32	40
2	1 → 2	25	30	0	0	0
$(k_2=3)$	2 → 1	0	0	0	41	15
3	1 → 2	27	32	35	48	51
4	1 → 3	89	79	69	0	0
$(k_4=2)$	3 → 1	0	0	83	79	65
5	1 → 3	88	93	83	0	0
$(k_5=2)$	3 → 1	0	0	80	86	76
6	1 → 3	70	75	0	0	0
$(k_6=3)$	3 → 1	0	0	0	86	91
7	1 → 3	52	57	61	43	33
8	2 → 1	93	83	73	0	0
$(k_8=2)$	1 → 2	0	0	73	63	59
9	2 → 1	61	66	0	0	0
$(k_9=3)$	1 → 2	0	0	0	71	81
10	2 → 1	83	88	93	75	61
11	2 → 3	76	66	56	0	0
$(k_{11}=2)$	3 → 2	0	0	87	72	66
12	2 → 3	78	83	0	0	0
$(k_{12}=3)$	3 → 2	0	0	0	77	85
13	2 → 3	87	92	97	84	77
14	2 → 3	75	80	85	72	64
15	3 → 1	97	87	77	0	0
$(k_{15}=2)$	1 → 3	0	0	89	86	75
16	3 → 1	73	78	0	0	0
$(k_{16}=3)$	1 → 3	0	0	0	84	88
17	3 → 1	88	93	98	86	81
18	3 → 1	75	80	85	91	93
19	3 → 2	99	89	79	0	0
$(k_{19}=2)$	2 → 3	0	0	85	80	75
20	3 → 2	82	72	0	0	0
$(k_{20}=3)$	2 → 3	0	0	0	92	88
21	3 → 2	86	91	81	72	63
22	3 → 2	59	64	69	78	84



▼ ODが偏在する場合　移動してお金がもらえることがある

agent ID	OD	$v(t=1)$	$v(t=2)$	$v(t=3)$
1	1 → 2	95	90	85
2	1 → 2	82	92	72
3	1 → 2	74	86	61
4	1 → 2	60	80	92
5	2 → 1	30	20	10

$P^1(\boldsymbol{v}) = (82+20+92) - (20+92) = 82$
$P^5(\boldsymbol{v}) = (95) - (95+92) = \mathbf{-92}$
$P^4(\boldsymbol{v}) = (95+20+72) - (95+20) = 85$

7. 結論

7. 結論

◆ 要旨

- **カーシェアリングにおける利用権取引制度(オークション)**
  - ➢ 車両の需給の時空間的なミスマッチを解消
- **VCGメカニズムを援用**
  - ➢ 真の評価値を正直に申告することが支配戦略(strategy-proof)
  - ➢ 効率的な資源配分を達成
  - ➢ 双対問題を考えることで支払い価格の意味を経済学的に解釈可能
- **勝者決定問題のNP困難性への対処**
  - ➢ 単一入札：LP緩和
  - ➢ 複数入札：切除平面法＋分枝限定法

◆ 課題

- ユーザは事前に入札する必要があり，リアルタイムに利用権を割り当てることができない
- キャンセルが発生すると．時空間OD接続性が満たされなくなり，効率性が急激に悪化する
- ユーザは事前に入札しうるすべての利用権の組み合わせに対して評価値を表明せねばならず．多大な時間と不便を要する

8. 補足

8. 補足

◆ VCGメカニズムを援用した際に，評価値の正直表明が弱支配戦略である

Step1. 真の評価値を表明してもらえれば，入札額の総和を制約条件下で最大にすることでsocial optimum(efficiency)達成.

Step2. このメカニズムのstrategy-proofを示す．評価値ベクトル$\boldsymbol{v}$，利用権割り当てベクトル$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})$で，$S^i(\boldsymbol{v}) = \{0,1\}$ は
ユーザiの利用権．利用権価格は，

$$P^i(\boldsymbol{v}) = W(0, \boldsymbol{v}^{-1}) - W^{-i}(\boldsymbol{v}) = \text{ユーザ}i\text{がいない場合における，[SO]での落札者の評価値の合計} - \text{[SO]におけるユーザ}i\text{以外の落札者の評価値の合計}$$

である．ユーザi以外が正直表明$\boldsymbol{v}^{-1}$をしているとする．

1. ユーザiも正直表明$\boldsymbol{v}^i$をした時のiの利得は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{v}) - P^i(\boldsymbol{v}) &= \boxed{\boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{v}) + W^{-1}(\boldsymbol{v})} - W(0, \boldsymbol{v}^{-1}) \\ &= \boxed{W(\boldsymbol{v})} - W(0, \boldsymbol{v}^{-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

2. ユーザiが虚偽表明$\boldsymbol{z}^i$をした時のiの利得は，

$$\boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) - P^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) = \boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) + W^{-1}(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) - W(0, \boldsymbol{v}^{-1}) \tag{2}$$

3. 利得の差(正直表明ー虚偽表明)は，

$W(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) - \boldsymbol{z}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1})$

$$\begin{aligned} (1) - (2) &= W(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) - \boxed{W^{-1}(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1})} \\ &= W(\boldsymbol{v}) - W(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) - (\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{z}^i) \cdot \boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}) \end{aligned}$$

上式が正であれば，正直表明をしたほうが利得が大きいことになる.

8. 補足

◆ VCGメカニズムを援用した際に，評価値の正直表明が弱支配戦略である

Step3. Step2でみたように，利得の差(正直表明ー虚偽表明)は，

$$W(\boldsymbol{v}) - W\left(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}\right) - \left(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{z}^i\right) \cdot \boldsymbol{S}^i\left(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}\right) \qquad (*)$$

である．(∗)が正であれば，正直表明をしたほうが利得が大きいことになる．

1. ユーザiが正直表明$\boldsymbol{v}^i$で利用権を獲得していた場合 → $\boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{v}) = 1$
   ユーザiは真の評価値より安く表明する可能性がある．つまり，$\boldsymbol{z}^i < \boldsymbol{v}^i$
   a. これにより落札者がjになるなら，$\boldsymbol{z}^i < \boldsymbol{v}^j < \boldsymbol{v}^i$であり，$\boldsymbol{S}^i\left(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}\right) = 0$であるから，
   $$(*) = \boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^j > \boldsymbol{0}$$
   b. 落札者がiから変わらないなら，$\boldsymbol{S}^i\left(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}\right) = 1$であるから，
   $$(*) = \boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{z}^i - \left(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{z}^i\right) = \boldsymbol{0}$$

   $(*) \geq 0$

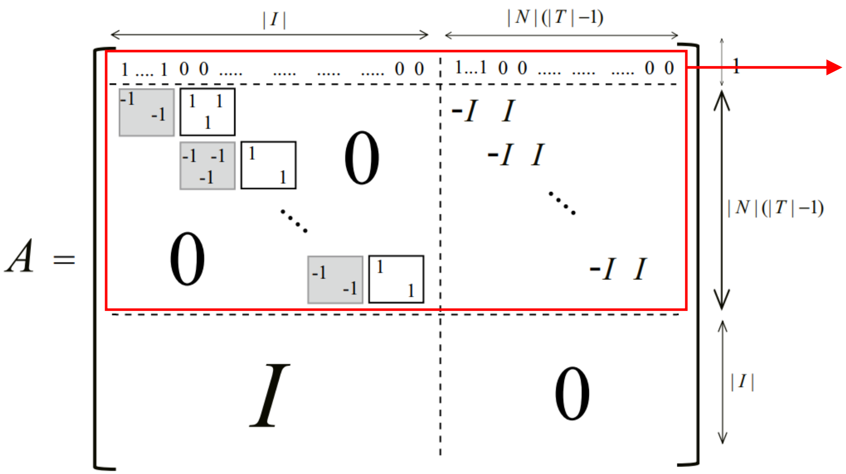
2. ユーザiが正直表明$\boldsymbol{v}^i$で利用権を獲得できていなかった場合 → $\boldsymbol{S}^i(\boldsymbol{v}) = 0$
   ユーザiは真の評価値より高く表明する可能性がある．つまり，$\boldsymbol{z}^i > \boldsymbol{v}^i$
   a. これにより落札者がjになるなら，$\boldsymbol{v}^i < \boldsymbol{v}^j < \boldsymbol{z}^i$であり，$\boldsymbol{S}^i\left(\boldsymbol{z}^i, \boldsymbol{v}^{-1}\right) = 1$であるから，
   $$(*) = \boldsymbol{v}^j - \boldsymbol{z}^i - \left(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{z}^i\right) = \boldsymbol{v}^j - \boldsymbol{v}^i > \boldsymbol{0}$$
   b. 落札者がiから変わらないなら，
   $$(*) = \boldsymbol{0}$$

   $(*) \geq 0$

以上より，いかなるケースにおいても，$(*) \geq 0$であるから，正直表明が弱支配戦略である．■

8. 補足

◆ 単一入札[SO-SMB]のLP緩和問題[SO-SMB-LP]の制約条件行列Aは全ユニモジュラ行列



フロー保存則を表す．
フロー保存則を表す接続行列は全ユニモジュラ行列である(Korte, 2000)

$$\sum_{i\in I}\sum_{pq\in L} x^{i}_{p^{i}q^{i}}(1) + \sum_{q\in N} x^{S}_{qq}(1) = \mu$$ 車両数制約

$$-\sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^{i}_{p^{1}q^{1}}(t-1) - x^{S}_{qq}(t-1) + \sum_{i\in I}\sum_{p\in N} x^{i}_{q^{i}p^{i}}(t) + x^{S}_{qq}(t) = 0$$ 時空間接続条件

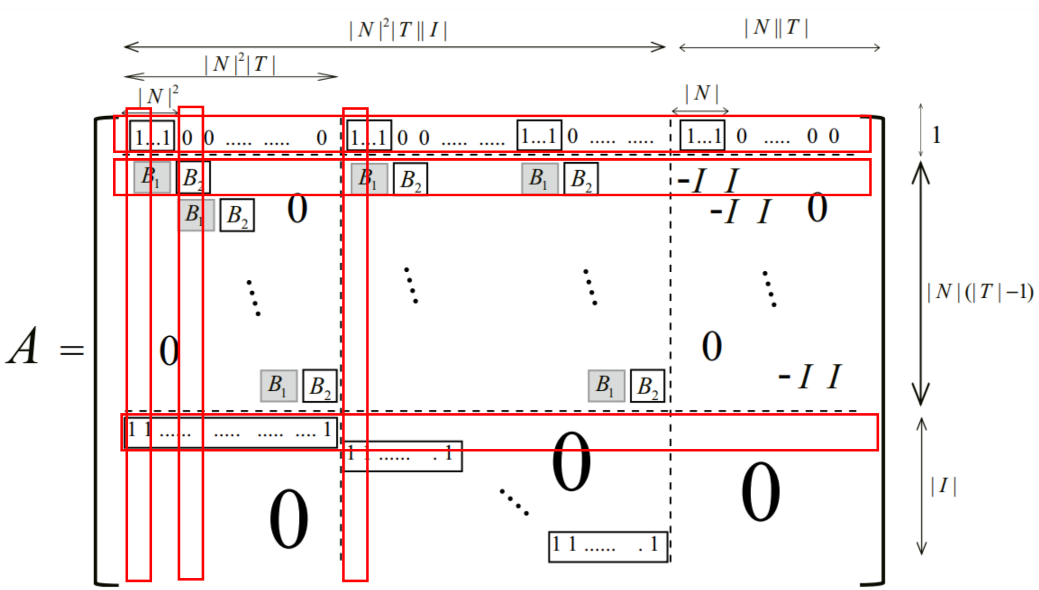
全ユニモジュラ行列と単位行列を結合した行列は全ユニモジュラ行列である(Hoffman and Kruskal, 1956)．
以上より，この行列Aは全ユニモジュラ行列である．

■

8. 補足

◆ 複数入札[SO]のLP緩和問題[SO-LP]の制約条件行列Aは全ユニモジュラ行列ではない

全ユニモジュラ行列の定義は，行列Aの任意の小行列式が0か+1か-1であることである．[SO-LP]の制約条件行列Aから，1列目・2列目・$N(T-1)+2$列目，1行目・N^2+1行目・N^2T+1行目を抜き出した小行列の小行列式は，



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

I: The identity matrix of demension |*N*|.

となり，反例が存在する．よって，Aは全ユニモジュラ行列ではない．

■