Pigouvian Pricing and Stochastic Evolutionary Implementation

Sandholm, William H. "Pigouvian pricing and stochastic evolutionary implementation." Journal of Economic Theory 132.1 (2007): 367-382.

2022/5/13　理論談話会#6
交通・都市・国土学研究室 小川 大智

目次

背景

- 外部性（ある経済主体が市場を経ずに他の経済主体に影響を及ぼすこと）

  経済の非効率性(inefficiency)の原因

  例)交通渋滞による旅行時間の増加、技術プラットフォームを大勢が利用することによる利便性向上など

  →外部性に対して課金することで効率的(efficient)な状態が安定的（均衡）となるようにしたい
- しかし、プランナーの視点では、
  - 人の選好を知らなければ何が効率的な状態なのかわからない
  - 行動によってしか人を区別することができない（i.e.人の名前や性別で区別することができない）
  - また、もし適切な課金額を知ることができたとしても効率的でない均衡もできてしまう可能性

目的

以下のような**課金体系(Price Scheme)**を実装したい

- 最初の状態に依存しない（i.e.効率的でない均衡に陥らない）
- 長期的にみて効率的な行動が卓越する

ただし、制約はある

- 人の選好を知る必要がない
- 人を区別する必要がない

定義

- プレイヤー $i \in \{1,2,\cdots,N\} = I$、$-i = I \setminus \{i\}$
- 戦略集合 $S^i = \{0,1,2,\cdots,n\} = A$ ただし、戦略0はoutside option(経済に関わらない戦略)
- 戦略プロファイル $s \in S = \Pi_i S^i$
- 集計行動 $x(s)$ 戦略aの集計行動$x_a(s) = \left|i \in \{1,\cdots,N\}: s^i = a\right|$
- プレイヤーiの効用関数

$$U^i(s) = \underbrace{u_{s^i}\big(x(s)\big)}_{\text{共通項}} + \underbrace{\theta^i_{s^i}}_{\text{特異項}}$$

共通項：
外部性を内包
ただし、$u_0(s) = 0$

特異項：個人の選好

マルコフ連鎖

マルコフ連鎖とは

- マルコフ過程のうち取りうる状態が離散的なもの
- マルコフ過程：次の状態が現在の状態のみによって決定される確率過程

マルコフ連鎖$\{s_t\}_{t \in Z_+}$

- ランダムに選ばれたプレイヤーiが戦略を変えるチャンスを与えられる
- π_a：プレイヤーiが戦略aを取ることにより得られる効用
- プレイヤーiが戦略aを取る確率L_a^ε（εはノイズレベル）

$$L_a^\varepsilon = \frac{\exp(\varepsilon^{-1}\pi_a)}{\sum_{b \in A} \exp(\varepsilon^{-1}\pi_b)}$$

定常分布

マルコフ連鎖$\{s_t\}_{t\in\mathbf{Z}_+}$の遷移確率

$$P^{\varepsilon}(s_{t+1}=\hat{s}|s_t=s) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\exp\left(\varepsilon^{-1}U^i(\hat{s}^i,s^{-i})\right)}{\sum_b \exp\left(\varepsilon^{-1}U^i(b,s^{-i})\right)} & \text{if } \hat{s}^{-i}=s^{-i} \text{ and } \hat{s}^i \neq s^i \text{ for some } i \\ \displaystyle\sum_i \frac{1}{N}\frac{\exp\left(\varepsilon^{-1}U^i(\hat{s}^i,s^{-i})\right)}{\sum_b \exp\left(\varepsilon^{-1}U^i(b,s^{-i})\right)} & \text{if } \hat{s}=s \\ 0 \ \text{otherwise} \end{cases}$$

- エルゴード分布　（∵任意の状態に最小でNステップで到達可能、状態が変化しない確率が常に非負）
  - 十分長い時間の中で$\{s_t\}$が従う分布μ^{ε}
  - μ^{ε}は初期値によらず一定

→ μ^{ε}は長期的にみたプレイヤーの行動を表す

ノイズレベルεが小さいとき

Logit stochastically stable(LSS)戦略プロファイルが重要

$$LSS(u,\theta) = \left\{s \in S: \lim_{\varepsilon\to 0} \mu^{\varepsilon}(s) > 0\right\}$$

Price Scheme

課金体系(price scheme)

- $p: \mathrm{X}^{\mathrm{N}} \to R^{n+1}$
- ただし、ここではoutside optionには課金しない (i.e. $p_0(x) = 0$)
- このとき、プレイヤーiの効用は、

$$U^i(s) = \underbrace{\{u_{s^i}\big(x(s)\big) - p_{s^i}\big(x(s)\big)\}}_{\text{新しい共通項（集計行動}x(s)\text{の関数）}} + \theta^i_{s^i}$$

- プレイヤーの長期的な行動は$u - p$とθで記述される

$$LSS(u - p, \theta)$$

Social Choice Correspondence

Social choice correspondence

- 社会的選択(social choice)：それぞれ選好を持った個人の集団における意思決定
- Social choice correspondence $\phi\colon \Theta \to S$
  - 選好プロファイルθが与えられたときに、戦略プロファイルsを選ぶ函数
  - $LSS(u-p,\theta)$だったので、$u-p$が決まっていれば、
    $$\phi(\theta) = LSS(u-p,\theta)$$
    - uは所与
    - プランナーによって与えられたpによりϕが実装される

→プランナーは$\phi(\theta)$が効率的な戦略プロファイルとなるようにpを定めれば良い

ただし、

- pはθに依ってはいけない（プランナーはプレイヤーの選好を知らない）
- pは$\phi(\theta)$に依ってはいけない（プランナーはプレイヤーの選好を知らないので何が効率的な戦略プロファイルか知らない）

Efficient Social Choice Correspondence

総効用$\bar{U}(s,\theta)$を最大化する

$$\bar{U}(s,\theta)=\sum_a x_a(s)u_a\big(x(s)\big)+\sum_a\sum_{i:s^i=a}\theta_a^i$$

- Efficient social choice correspondence $\boldsymbol{\phi}^*$

$$\phi^*(\theta)=\operatorname*{argmax}_{s\in S}\bar{U}(s,\theta)$$

（主張1）

- ϕ^*は以下のようなoptimal price scheme p^*により実装される（証明は後ほど）
  - $p_a^*(x)=-\left[\sum_b x_b\big(u_b(x)-u_b(x-e^a)\big)-\big(u_a(x)-u_a(x-e^a)\big)\right]$

  ただし、e^aはR^{n+1}の基底ベクトル
  - $p_0^*(\mathrm{x})=0$
- p_a^*はプレイヤー1人が戦略aを選んだ場合とoutside optionを選んだ場合との総効用の差
- **$\boldsymbol{p}^*$は$\boldsymbol{\theta}$にも$\boldsymbol{\phi}^*$にも依存していない**

ポテンシャルゲーム

ポテンシャルΠとは

$$U^i(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) - U^i(s^i, s^{-i}) = \Pi(\hat{s}^i, \hat{s}^{-i}) - \Pi(s^i, s^{-i})$$
$$\text{for all } i, \hat{s}, s \ \ \text{s.t.}\, \hat{s}^{-i} = \hat{s}^{-i}$$

を満たすような函数

このようなΠが存在するようなゲームをポテンシャルゲームという。

（主張2）

ゲーム$(u - p^*, \theta)$はポテンシャルゲームであり、
$\Pi(s) = \overline{U}(\cdot, \theta)$（ただし、$u, \theta$は固定）

主張2の証明

- あるiについて、$s^i = a, \hat{s}^i = b, s^{-i} = \hat{s}^{-i}$
- プレイヤーiを除いた集計行動$x^0 = x(s^{-i})$
- $x^a = x^0 + e^a = x(s), x^b = x^0 + e^b = x(\hat{s})$
- 各戦略$d \in A$をとったプレイヤーの共通項は、

$$u_d(x) - p_d^*(x) = \sum_c x_c \left(u_c(x) - u_c\left(x - e^d\right)\right) + u_d\left(x - e^d\right)$$

- このとき、

$$
\begin{aligned}
&U^i\left(\hat{s}, \theta^i\right) - U^i\left(s, \theta^i\right) \\
&= \left[\sum_c x_c^b \left(u_c\left(x^b\right) - u_c\left(x^0\right)\right) + u_b\left(x^0\right) + \theta_b^i\right] \\
&- \left[\sum_c x_c^a \left(u_c\left(x^a\right) - u_c\left(x^0\right)\right) + u_a\left(x^0\right) + \theta_a^i\right] \\
&= \sum_c \left(x_c^b u_c\left(x^b\right) - x_c^a u_c\left(x^a\right)\right) + \theta_b^i - \theta_a^i \\
&= \left[\sum_c x_c^b u_c\left(x^b\right) + \sum_c \sum_{i:\hat{s}^i = c} \theta_c^i\right] - \left[\sum_c x_c^a u_c\left(x^a\right) + \sum_c \sum_{i:s^i = c} \theta_c^i\right] = \overline{U}(\hat{s}, \theta) - \overline{U}(s, \theta)
\end{aligned}
$$

Blumeの定理

もし、選択が確定的なら初期値に依存した限られた均衡にしか達しない

→**複数の均衡**がある場合にも効率的な状態が達成されるか？

主張3 (Blume(1997))

ポテンシャルΠを持つポテンシャルゲームでプレイヤーの行動がノイズレベルεのLogit選択ルールで表されるとき定常分布$\mu^{\varepsilon}(s)$は、

$$\mu^{\varepsilon}(s) = \frac{\exp\left(\varepsilon^{-1}\Pi(s)\right)}{\sum_{\hat{s}\in S}\exp(\varepsilon^{-1}\Pi(\hat{s}))}$$

- もし、εが十分小さければ、Πを最大にするような戦略プロファイルのみが残る
- 直感的には、
  - iが良い選択→Πが上昇（均衡に近づく）
  - iが誤った選択→Πが減少（他の均衡に移る可能性）
  - 均衡でのΠが大きいほど他の均衡に移りにくい

主張1に戻る

主張2と主張3を合わせれば、主張1は直ちに導かれる

- マルコフ連鎖$\{s_t\}$の定常分布$\mu^\varepsilon(s)$は、

$$\mu^\varepsilon(s) = \frac{\exp\left(\varepsilon^{-1}\Pi(s)\right)}{\sum_{\hat{s}\in S}\exp(\,\varepsilon^{-1}\Pi(\hat{s}))} = \frac{\exp\left(\varepsilon^{-1}\bar{U}(s,\theta)\right)}{\sum_{\hat{s}\in S}\exp(\,\varepsilon^{-1}\bar{U}(\hat{s},\theta))}$$

- 総効用の最大値$\bar{U}^* = \max_{s\in S}\bar{U}(s,\theta)$とすると、

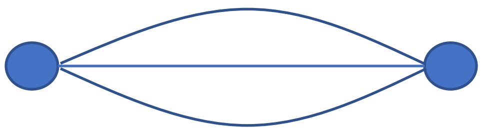
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\mu^\varepsilon(s) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\exp\left(\varepsilon^{-1}(\bar{U}(s,\theta)-\bar{U}^*)\right)}{\sum_{\hat{s}\in S}\exp(\,\varepsilon^{-1}(\bar{U}(\hat{s},\theta)-\bar{U}^*))}$$

$$= \begin{cases} 0 & if\,\bar{U}(s,\theta) \neq \bar{U}^* \\ 1 & if\,\bar{U}(s,\theta) = \bar{U}^* \end{cases}$$

$\rightarrow \bar{U}(s,\theta) = \bar{U}^*$ for all $s \in LSS(u-p^*,\theta)$

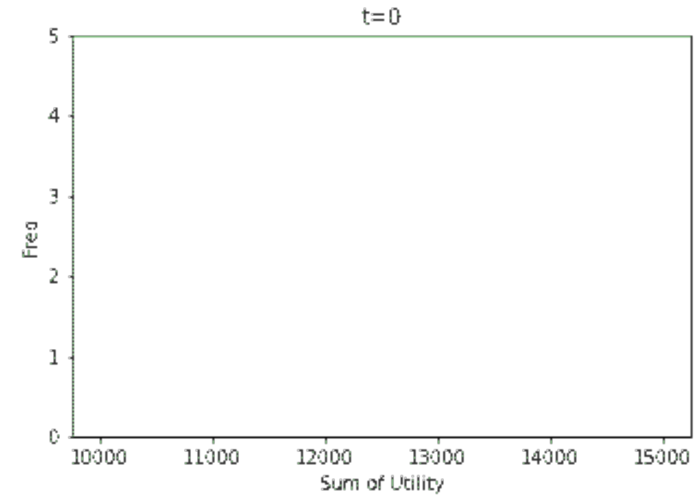
$\rightarrow\ \phi^*(\theta) = \operatorname{argmax}_{s\in S}\bar{U}(s,\theta)$ はp^*によって実装されている

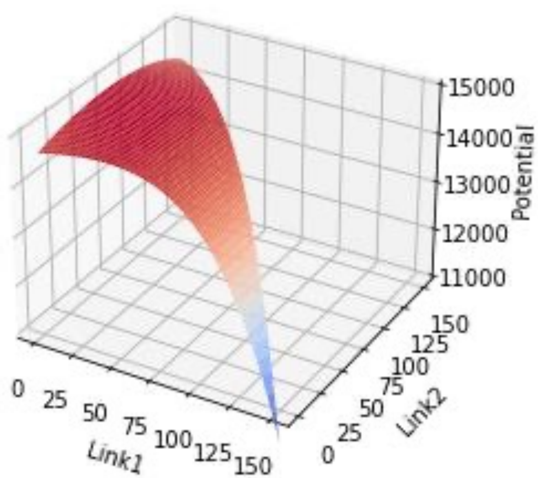
イメージ

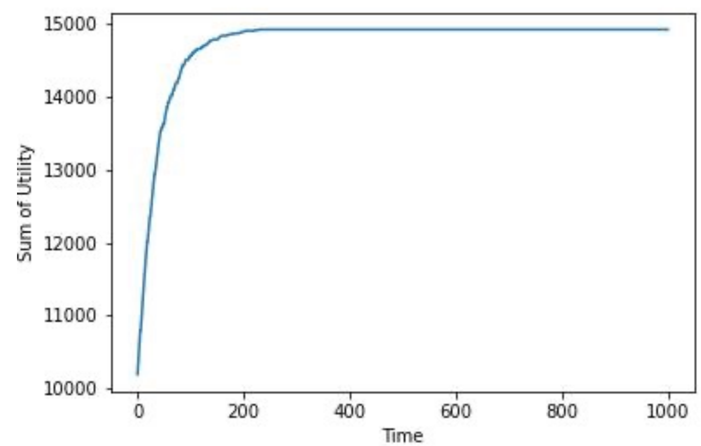


3つの経路の配分

- 150人のプレイヤー
- 戦略集合$S = \{0,1,2,3\}$
- $u_1(x) = -10\left(1 + 0.15\left(\frac{x_1}{20}\right)^4\right)$
- $u_2(x) = -20\left(1 + 0.15\left(\frac{x_2}{40}\right)^4\right)$
- $u_3(x) = -25\left(1 + 0.15\left(\frac{x_3}{50}\right)^4\right)$
- $\theta_{a\in\{1,2,3\}} = 100$







VCG Mechanismとの比較

AnonymityとObedience

- Anonymity：プランナーがプレイヤーの選好を知ることができない
- Obedience：プランナーがつくった戦略プロファイルにプレイヤーを従わせることができる

Optimal price schemeは両者の条件を満たすことができる。

一方で、多くの手法では**個人の選好を明らかに**した上で、プランナーが提示する効率的な戦略に従ってもらうという方法がとられる

→Anonymityを崩す必要

VCG mechanismでは

- 各個人が本当の選好を表明することが弱支配戦略となる
- 効率的な配分を実現

VCG Mechanism

- Vickrey-Clarke-Groves mechanism
  - まず、各プレイヤーの選好θを表明してもらう
  - 表明された選好が正しいとして、プランナーが効率的な戦略プロファイル$\bar{s}(\theta)$を求解する

$$\bar{s}(\theta) = \operatorname*{argmax}_{s \in S} \sum_{j \in I} U^j\left(s, \theta^j\right)$$

  - プランナーが各プレイヤーiへ$t^i(\theta)$を支払う(Vickrey payment)

$$t^i(\theta) = \sum_{j \neq i} U^j\left(\bar{s}(\theta), \theta^j\right) - \tau^i(\theta^{-i})$$

  - ただし、τ^iは、
    - Clarke mechanism $\tau_c^i\left(\theta^{-i}\right) = \sum_{j \neq i} U^j\left(\overline{s_{-i}}\left(\theta^{-i}\right), \theta^j\right)$

$$where\ \overline{s_{-i}}\left(\theta^{-i}\right) = \operatorname*{argmax}_{s \in S} \sum_{j \neq i} U^j\left(s, \theta^j\right)$$

    - modified Clarke mechanism $\tau_{mc}^i\left(\theta^{-i}\right) = \sum_{j \neq i} U^j\left(\tilde{s}_{-i}\left(\theta^{-i}\right), \theta^j\right)$

$$where\ \tilde{s}_{-i}\left(\theta^{-i}\right) = \operatorname*{argmax}_{s \in S, s^i = 0} \sum_{j \neq i} U^j\left(s, \theta^j\right)$$

つまり、iが参加することで他の人が得られる効用の増加分を支払う

VCG mechanismとOptimal Price Scheme

- ある個人が与える外部性に対して課金（or 支払い）している点では共通
- しかし、両者は均衡点においても一般に異なる値を取る

以下、いくつか例を見ていく

VCG mechanismとOptimal Price Scheme

例1

- 戦略集合$S^i = \{0, a, b\}$
- 共通項$u_a(x) = v_a(x_a), u_b(x) = v_b(x_b)$ ただし、v_a, v_bは狭義の単調増加
- $\bar{s}_i(\theta) = 0, \bar{s}_{-i}(\theta) = a$

このときの課金額は、

- $p_i^* = 0$ ($\because$ iはoutside optionをとっている)
- $-t_c^i = (N-1)\big(v_a(N) - v_a(N-1)\big) > 0$
- $-t_{mc}^i = 0$ ($\because$ iは元々outside optionをとっている)

Clarke mechanismではoutside optionを選択した人にも課金を求めている

VCG mechanismとOptimal Price Scheme

例2

- 例1と同じ戦略集合と共通項
- $\bar{s}_j(\theta) = a$ for all $j \in \mathrm{I}$

このときの課金額は、

- $p_i^* = -(N-1)\big(v_a(N) - v_a(N-1)\big) < 0$
- $-t_c^i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ \text{ if } \bar{s}^j{}_{-i} = a \text{ for all } j \in I \\ \vdots \\ (N-1)\big(v_b(N) - v_a(N)\big) + \sum_{j \neq i}\big(\theta_b^j - \theta_a^j\big) \text{ if } \bar{s}^j{}_{-i} = b \text{ for all } j \in \mathrm{I} \end{array} \right\}$
- $-t_{mc}^i =$
$\left\{ \begin{array}{c} -(N-1)\big(v_a(N) - v_a(N-1)\big) < 0 \ \text{ if } \bar{s}^j{}_{-i} = a \text{ for all } j \in I \\ \vdots \\ (N-1)\big(v_b(N-1) - v_a(N)\big) + \sum_{j \neq i}\big(\theta_b^j - \theta_a^j\big) \text{ if } \tilde{s}^j{}_{-i} = b \text{ for all } j \neq i \end{array} \right\}$

なぜ違うのか？

- 外部性の定義
  - VCG mechanism
    - プレイヤーは**どのような選好を表明するか**を選択する
    - →プランナーにより決められた戦略プロファイル$\bar{s}(\theta)$に対して、表明した選好がどのような影響を与えたかが外部性となる
  - Optimal price scheme
    - プレイヤーは**どの戦略を選ぶか**戦略集合の中から選択する
    - →選んだ戦略が集計行動に与える影響が外部性となる

→外部性の定義がそれぞれ異なるため、課金額が異なるのは当たり前

手法の選択

- どちらの手法が適しているか？
  - VCG mechanism
    - プランナーが、全てのプレイヤーの選好を少ないコストで収集することができる
    - プランナーがプレイヤーの選好から効率的な戦略プロファイルを選ぶことができる
    - プランナーがプレイヤーを効率的な戦略プロファイルに従わせることができる

    例えば、オークションなど
  - Optimal price scheme
    - プレイヤーが大人数の場合など、選好の収集、戦略プロファイルの求解、プレイヤーへの戦略の強制のいずれかが難しい場合
    - プレイヤーが時間と共に変化していく場合など、繰り返しの割り当てが必要となる場合

    例えば、高速道路での経路の割り当てなど

Optimal Price Schemeの限界

- 総効用最大化はノイズの小さなLogit選択のルールに依存する→他の選択原理に基づく場合も研究中
- 大人数の場合に定常分布に至るまでの時間
  - 一つの均衡から抜け出すのにかかる時間は人口に対して指数関数的に増大
  - ただし、プレイヤーが分散して配置されていて、かつ局所的な関わり合いがある場合には、感染症と同じような仕組みで、安定した戦略が速やかに拡散していく可能性

まとめ

成果

- プレイヤーの選好を知らずに、長期的に見て総効用を最大化するような行動が卓越するような課金体系が可能
- VCGとOptimal Price Schemeでは外部性の定義が違うため課金額も一般には異なる

課題

- 今回の研究は進化ゲームの定義に依存
- 定常分布に至る時間

参考文献

- L. E. Blume, Population games, in: W. B. Arthur, S. N. Durlauf, and D. A. Lane (Eds.), The Economy as an Evolving Complex System II, Addison-Wesley, Reading, MA, 1997, 425-460.
- Sandholm, William H. "Pigouvian pricing and stochastic evolutionary implementation." Journal of Economic Theory 132.1 (2007): 367-382.