2023年理論談話会#8

The multi-period incremental service facility location problem

Albareda-Sambola, M., Fernández, E., Hinojosa, Y., & Puerto, J. (2009).
Computers & Operations Research, *36*(5), 1356-1375.

2023年5月15日

博士1年　増田 慧樹

研究のサマリー・良かった点・悪かった点

研究のサマリー

- 計画期間内の**動的な施設配置問題**を定式化
- 最適解の上界と下界を求めるラグランジュ緩和問題の効率的解法を提案
- 数値実験より，上下界のギャップが小さく最適解に近い解を小さな計算時間で求められる

良かった点

- 近似解法やソルバーでなく，理論的な最適値の上・下界を求め，提案手法の信頼度を示した
- 問題の性質を利用し，大規模問題にもスケールする効率的な解法を提案

悪かった点

- 都市空間上の配置結果や配置の性質を示す図化がなかったこと

新規性・有用性・信頼度

新規性

- 手法論的には，解法自体はオーソドックスな手法の組み合わせなので革新性は小さい
- ただそのアルゴリズムが汎用ソルバーを圧倒する計算時間で精度の良い解を導くことを入念な数値計算で明らかにしたことに新規性がある

有用性

- 大規模問題にスケールするので，実都市におけるケーススタディに適用可能
- 簡潔なアルゴリズムからなるので，種々の発展や近似的な解法のベンチマークになる

信頼度

- オーソドックスで明快な手法に則っている．また，数値計算の設定も網羅的で入念であることから，信頼度は高いと言える．

施設配置問題とは

施設の**配置可能地点**，需要をもつ**顧客の集合**が与えられて，ある基準を満たす**<u>施設の配置場所を決定</u>**する問題.

例えば，*p*-median問題：*p*個の施設を配置するとき顧客・施設間の距離の総和を最小化する.

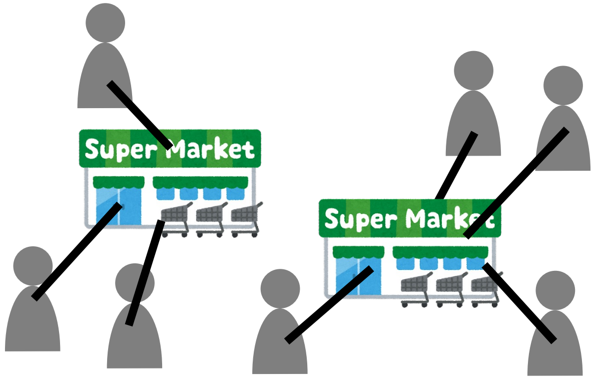
$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j} h_i d_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j} x_{ij} = 1 & \forall i \\
& x_{ij} \leq y_j & \forall i, j \\
& \sum_{j} y_j = p & \\
& x_{ij}, y_j \in 0, 1 & \forall i, j
\end{aligned}
$$

h_i: 需要場所iにおける需要量

d_{ij}: 需要場所iと施設の配置場所jとの距離

x_{ij}: 決定変数．需要場所iの顧客が配置場所jの施設を利用するなら1

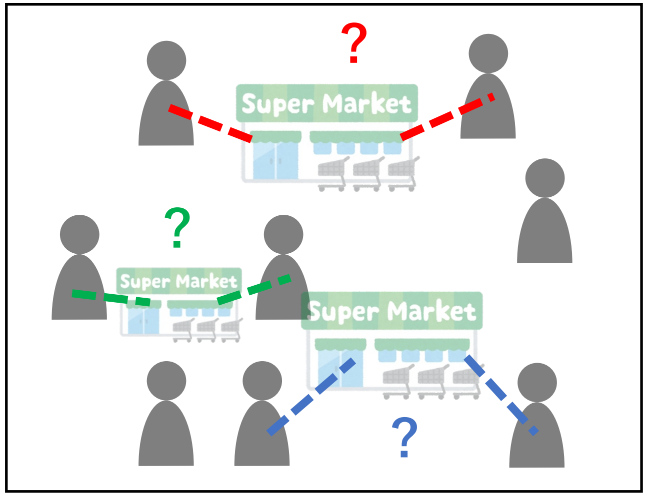
y_j: 決定変数．配置場所jに施設を配置するなら1



動的施設配置問題とは

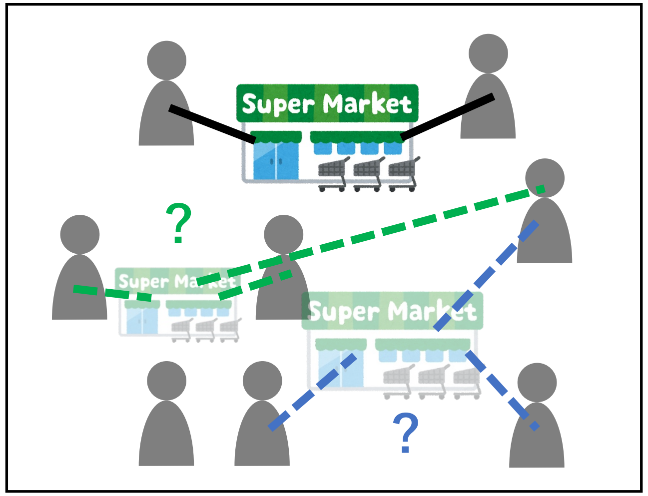
- 施設の配置場所だけでなく，各施設を配置する「**時期**」も決定変数に含む
  → スケジューリング問題

t=1, 2人の需要を満たす必要．
開設施設数 1



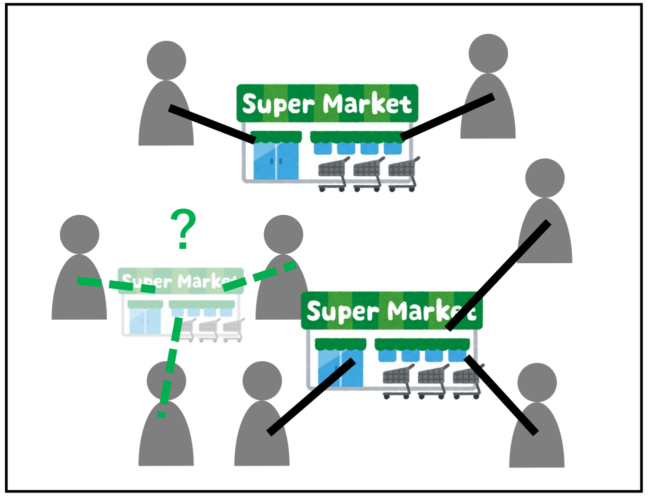
- どこに配置する？
  需要から遠い場所に配置すると移動コストが嵩む

t=2, 5人の需要を満たす必要．
開設施設数 1



- どの人を割り当てる？
  遠くの人を割り当てると移動コストが嵩む

t=3, 8人の需要を満たす必要．
開設施設数 1



- どの順番で配置する？
  初めに維持管理費の高い施設を建設すると総費用が嵩む

既往の研究と位置付け

動的施設配置問題は，Warszawski (1973)以来多くの既往研究がある

- 仮定：**全需要**が初期時点から満たされる必要がある（essential service）
- その上で新設・廃止施設と時期を決定する

本研究の新規性

- 各時点で**事前に決めた需要が段階的に**満たされる（non-essential service）

→ Multi-period <u>Incremental</u> Service Facility Location Problem

ex) 図書館, 老人ホーム, 幼稚園, 駐車場, スーパー, 銀行…

- 予算制約により全施設を一度に建設することは不可能
- 全需要は最終段階で満たされていれば良い
- 全期間の維持管理費・建設費・総移動費用を最小化する最適配置計画を考える

研究の構成

1. Introduction
    - 既往研究と本研究の位置付け

2. A mathematical programming formulation of MISFLP

3. The allocation subproblem
    - 需要の割り当て問題の効率的解法

4. Lagrangean relaxation
    - ラグランジュ緩和問題→元問題の下界を得る

5. Algorithm
    - 解法：劣勾配法とヒューリスティクスの組み合わせ

6. Computational study
    - 最適化ソルバー（CPLEX）との比較（計算時間, gap）
    - 静的施設配置問題との比較

Multi-period Incremental Service Facility Location Problem

目的：計画期間を通じた<u>**総費用**</u>の最小化

c_{ij}^t: 個人iが施設jにt期に割り当てられるコスト（移動距離など）

f_j^t: 施設jをt期に開設するときの総コスト（建設費, 以降の維持管理費）

決めたいこと：

- 各期$t \in T$における**施設配置場所**$j \in J$
- 個人$i \in I$の**開設施設への割り当て**

制約：

- 各期tに最低n^tの需要が満たされる
- 各期tにp^t個の施設がオープンし，閉鎖は考えない
- 施設に一度割り当てられた人は最後までサービスを受け続ける（割り当て施設の変更は可）

→ NP-hard （一時点では*p*-median問題になるので）

定式化

決定変数

$$x_{ij}^t = \begin{cases} 1 & \text{if } t\text{期に個人}i\text{が施設j}\text{に割り当てられる} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y_j^t = \begin{cases} 1 & \text{if } t\text{期に施設j}\text{が配置される} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

目的関数：総コスト最小化

$$\min \quad \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}\underline{c_{ij}^t x_{ij}^t} + \underline{f_j^t y_j^t}\right)$$

c_{ij}^t: 個人iが施設jにt期に割り当てられるコスト（移動距離など）

f_j^t: 施設jをt期に開設するときの総コスト（建設費, 維持管理費）

定式化

制約条件

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant n^t \quad \forall t \in T,$$
・・・・・・・・・・・各期に最低n^tの需要が満たされる

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^t \leqslant 1 \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T,$$
・・・・・・・・・・各期に各人が割当てられる施設はせいぜい1つ

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant \sum_{j\in J} x_{ij}^{t-1} \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T,\ t > 1,$$
・・・一度割当てられた人は最後までサービスを受け続ける

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^{|T|} = 1 \quad \forall i \in I,$$
・・・・・・・・・・・・・・最終期に各人はいずれかの施設に割当てられる

$$x_{ij}^t \leqslant \sum_{k\leqslant t} y_j^k \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall t \in T,$$
・・・・オープンしていない施設には割当てられない

$$\sum_{j\in J} y_j^t = p^t \quad \forall t \in T,$$
・・・・・・・・・・・・・・各期にp^t個の施設がオープンする

$$\sum_{t\in T} y_j^t \leqslant 1 \quad \forall j \in J,$$
・・・・・・・・・・・・・・各施設は一度しか配置されない

$$x_{ij}^t \in \{0,1\} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall t \in T,$$

$$y_j^t \in \{0,1\} \quad \forall j \in J,\ \forall t \in T.$$

研究の構成

1. Introduction
    - 既往研究と本研究の位置付け

2. A mathematical programming formulation of MISFLP

3. The allocation subproblem
    - 需要の割り当て問題の効率的解法

4. Lagrangean relaxation
    - ラグランジュ緩和問題→元問題の下界を得る

5. Algorithm
    - 解法：劣勾配法とヒューリスティクスの組み合わせ

6. Computational study
    - 最適化ソルバー（CPLEX）との比較（計算時間, gap）
    - 静的施設配置問題との比較

需要の割り当て問題の効率的解法

- 以上の動的施設配置問題は，**①施設配置の決定問題**と**②配置した施設への需要の割り当て問題**に分割できる（後述）
- 3章では，②配置した施設への需要の割り当て問題が多項式時間で解けることを示す.

- d_{it}: 個人iをt期に初めて施設に割り当てる場合の全期を通じての総コスト.
  各人は最小コストの施設に割当てられるので,

$$d_{it} = \sum_{k=t}^{|T|} \left(\min_{j \in J^k} c_{ij}^k \right) \quad \forall i \in I, \ \forall t \in T.$$

- この累積コストd_{it}を用いて需要の割り当て問題の性質を述べる

需要の割り当て問題の効率的解法

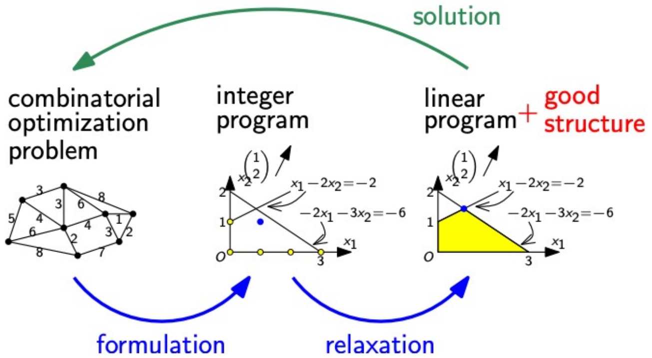
Proposition 1. t期の配置施設集合J^tが与えられるとき，各人の最適な割り当て問題は，以下の**線形計画問題**を解くことで得られ，その**係数行列は完全ユニモジュラである**.

$$
\begin{aligned}
\text{(ASP)}\ \min\quad & \sum_{t\in T}\sum_{i\in I} d_{it} z_{it} && t\text{期以降の割当てコスト（総移動距離）を最小化}\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{t\in T} z_{it} = 1 \quad \forall i \in I, && \text{初めての割り当ては1回だけ}\\
& \sum_{i\in I}\sum_{r=1}^{t} z_{ir} \geqslant n^t \quad \forall t \in T, && \text{各期に最低}n^t\text{以上の需要が満たされる}\\
& z_{it} \geqslant 0 \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T, && z_{it} = \begin{cases} 1 & \text{if } t\text{期に個人}i\text{が初めて割当てられたとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

完全ユニモジュラ行列: 任意の正方部分行列の行列式が 0, +1, −1の行列

定理: 完全ユニモジュラ行列$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 整数ベクトル$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$のとき，線形計画問題 $\{\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$の解は**整数**である.

NP-hardな組み合わせ最適問題に対して，線形緩和した問題を解くことで最適解を得られる（嬉しい！）



http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/fdopt/handout07.pdf

需要の割り当て問題

（証明）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t\in T}\sum_{i\in I} d_{it} z_{it} \\
\text{s.t.} \quad & \boxed{\begin{aligned} & \sum_{t\in T} z_{it} = 1 \quad \forall i \in I, \\ & \sum_{i\in I}\sum_{r=1}^{t} z_{ir} \geqslant n^t \quad \forall t \in T, \end{aligned}} \\
& z_{it} \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \ \forall t \in T,
\end{aligned}
$$

行列表示・係数行列

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & 1 & & & \dots & 1 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & \dots & & \ddots & \\
 & & 1 & & & 1 & \dots & & & 1 \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & \\
1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1
\end{bmatrix}.
$$

変形（行の引き算）

行列式の値を変えない操作

https://linky-juku.com/determinant/#i-8

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & \cdots & & \ddots & \\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

$\parallel$

完全ユニモジュラ
（二部グラフの接続行列）

完全ユニモジュラ

研究の構成

1. Introduction
   - 既往研究と本研究の位置付け

2. A mathematical programming formulation of MISFLP

3. The allocation subproblem
   - 需要の割り当て問題の効率的解法

4. Lagrangean relaxation
   - ラグランジュ緩和問題→元問題の下界を得る

5. Algorithm
   - 解法：劣勾配法とヒューリスティクスの組み合わせ

6. Computational study
   - 最適化ソルバー（CPLEX）との比較（計算時間, gap）
   - 静的施設配置問題との比較

解法

Multi-Period Incremental Service Facility Location Problem（再掲）

$$\min \quad \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} c_{ij}^t x_{ij}^t + f_j^t y_j^t\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant n^t \quad \forall t\in T,$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^t \leqslant 1 \quad \forall i\in I,\ \forall t\in T,$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant \sum_{j\in J} x_{ij}^{t-1} \quad \forall i\in I,\ \forall t\in T,\ \ t>1,$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}^{|T|} = 1 \quad \forall i\in I,$$

$$x_{ij}^t \leqslant \sum_{k\leqslant t} y_j^k \quad \forall i\in I,\ \forall j\in J,\ \forall t\in T,$$

$$\sum_{j\in J} y_j^t = p^t \quad \forall t\in T,$$

$$\sum_{t\in T} y_j^t \leqslant 1 \quad \forall j\in J,$$

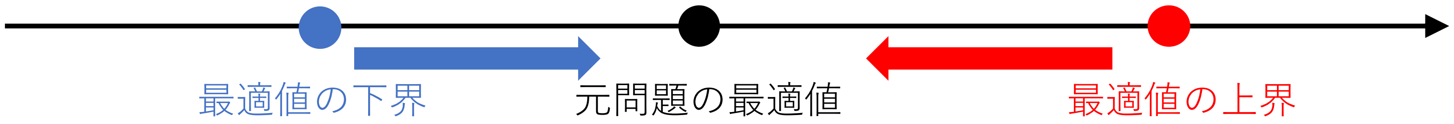
$$x_{ij}^t \in \{0,1\} \quad \forall i\in I,\ \forall j\in J,\ \forall t\in T,$$

$$y_j^t \in \{0,1\} \quad \forall j\in J,\ \forall t\in T.$$

どう解くか？

- 大規模な組み合わせ最適化 (NP-hard)
  → 厳密に解くのは難しい
- 近似解法？
  → 得られた解がどれだけいいか，まだ改善できるのかなどがわからない

制約条件を緩めた（解きやすい）緩和問題を解き，最適値の上界と下界を求めるアプローチをとる



ラグランジュ緩和

Multi-Period Incremental Service Facility Location Problem（再掲）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} c_{ij}^t x_{ij}^t + f_j^t y_j^t\right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant n^t \quad \forall t \in T, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^t \leqslant 1 \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant \sum_{j\in J} x_{ij}^{t-1} \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T,\ t > 1, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^{|T|} = 1 \quad \forall i \in I, \\
& \boxed{x_{ij}^t \leqslant \sum_{k\leqslant t} y_j^k \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall t \in T,} \\
& \sum_{j\in J} y_j^t = p^t \quad \forall t \in T, \\
& \sum_{t\in T} y_j^t \leqslant 1 \quad \forall j \in J, \\
& x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall t \in T, \\
& y_j^t \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J,\ \forall t \in T.
\end{aligned}
$$

この制約条件を緩和し，ペナルティ項として目的関数に取り込む
＝ラグランジュ緩和

$u_{ij}^t > 0$（ラグランジュ乗数）として，目的関数を書き直す

$$
\boxed{L(u) = \min \quad \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} c_{ij}^t x_{ij}^t + f_j^t y_j^t\right) + \underline{\sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij}^t \left(x_{ij}^t - \sum_{k\leqslant t} y_j^k\right)}}
$$

- 制約に違反した分（$x_{ij}^t > \sum y_j^k$）だけ第二項が大きくなるので，なるべく制約に違反しないように最小化する
- 緩和問題の最適値は，元の問題の下界である

ラグランジュ緩和

式変形すると，ラグランジュ緩和問題の目的関数$L(u)$は以下になる

$$\min \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(c_{ij}^t + u_{ij}^t)x_{ij}^t}_{x\text{に関する項}} + \underbrace{\sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(f_j^t - \sum_{i\in I}\sum_{k\geqslant t} u_{ij}^k\right)y_j^t}_{y\text{に関する項}}.$$

xに関する項

yに関する項

→ xに関する最適化とyに関する最適化に分離可能

$$
\begin{aligned}
L_x(u) = \min \quad & \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(c_{ij}^t + u_{ij}^t)x_{ij}^t \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant n^t \quad \forall t \in T, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^t \leqslant 1 \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^t \geqslant \sum_{j\in J} x_{ij}^{t-1} \quad \forall i \in I,\ \forall t \in T,\ t > 1, \\
& \sum_{j\in J} x_{ij}^{|T|} = 1 \quad \forall i \in I, \\
& x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \forall t \in T.
\end{aligned}
$$

3章 需要の割り当て問題と同じ

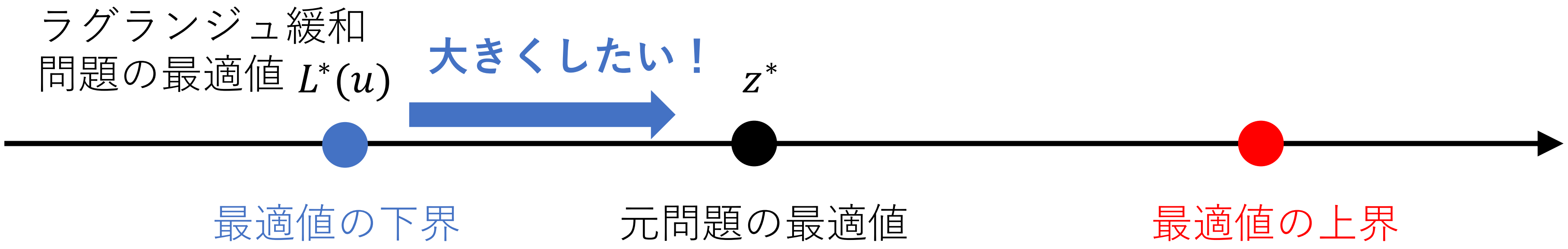
$$
\begin{aligned}
L_y(u) = \min \quad & \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(f_j^t - \sum_{i\in I}\sum_{k\geqslant t} u_{ij}^k\right) y_j^t \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in J} y_j^t = p^t \quad \forall t \in T, \\
& \sum_{t\in T} y_j^t \leqslant 1 \quad \forall j \in J, \\
& y_j^t \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J,\ \forall t \in T,
\end{aligned}
$$

輸送問題の形（係数行列が完全ユニモジュラ）

$L_x(u), L_y(u)$の最適値は，線形緩和問題の最適値と同じ！
→ ラグランジュ緩和問題を線形計画法で効率的に解ける

ラグランジュ緩和

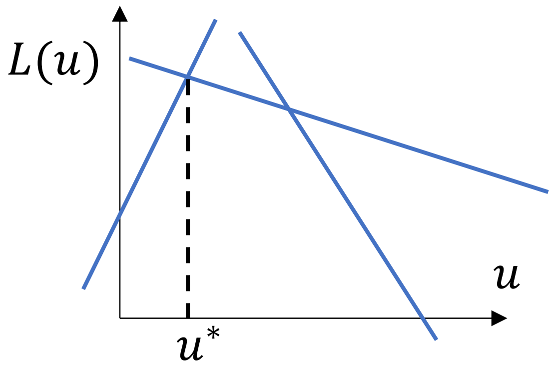
- 下界はなるべく大きい方が，精度良く元問題の最適値を評価できるため有用



→ $L(u)$を最大化するuを求める

$$L(u) = \min \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} c_{ij}^t x_{ij}^t + f_j^t y_j^t\right) + \sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij}^t \left(x_{ij}^t - \sum_{k\leqslant t} y_j^k\right)$$

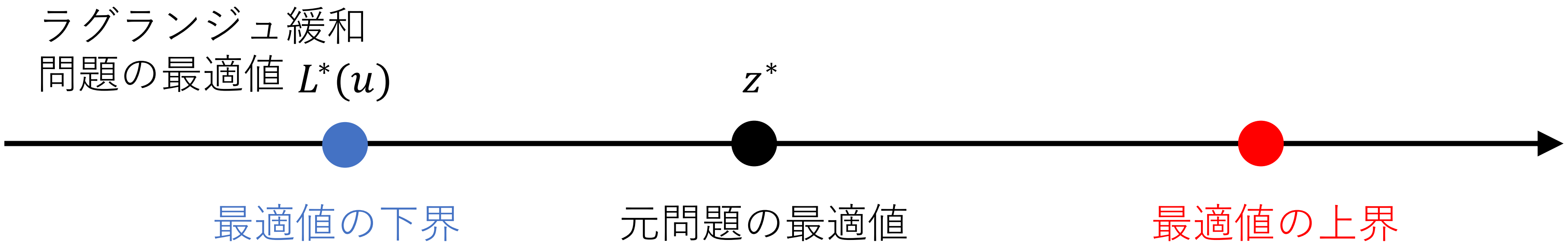
$L(u)$はuに関して凹関数なので，uの係数$x_{ij}^t - \sum y_j^k$（劣勾配という）によって，uを更新していくことで最大値が求まる



劣勾配法について　https://www.jstage.jst.go.jp/article/bjsiam/23/3/23_KJ00008829092/_pdf

ラグランジュ緩和

- 上界も求めることにより，最適値の取り得る範囲を限定できる



- $L_y(u)$を解いて得られる$\tilde{y}$を元に需要の割り当て問題(ASP($\tilde{y}$))を解く．

→ 元の問題の実行可能解が得られる．∵ $L_y(u)$の係数行列が完全ユニモジュラで整数解が得られる

→ 最適値の上界になる

割り当て問題の最適値　　$L_y(u)$の最適値の最大値

よって，上界は $\boxed{val(\mathrm{ASP}(\tilde{y})) + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} f_j^t \tilde{y}_j^t,}$

研究の構成

1. Introduction
- 既往研究と本研究の位置付け

2. A mathematical programming formulation of MISFLP

3. The allocation subproblem
- 需要の割り当て問題の効率的解法

4. Lagrangean relaxation
- ラグランジュ緩和問題→元問題の下界を得る

5. Algorithm
- 解法：劣勾配法とヒューリスティクスの組み合わせ

6. Computational study
- 最適化ソルバー（CPLEX）との比較（計算時間, gap）
- 静的施設配置問題との比較

解法アルゴリズム

初期化

- ラグランジュ乗数u_{ij}^tを初期化
- ラグランジュ緩和問題を解き最適解$(\tilde{x}, \tilde{y})$と最適値$L(u)$を得る.
  → 下界$Z_{LB} = L(u)$, 上界$Z_{UB} = val\big(ASP(\tilde{y})\big) + \sum_t \sum_j f_j^t \tilde{y}_j^t$

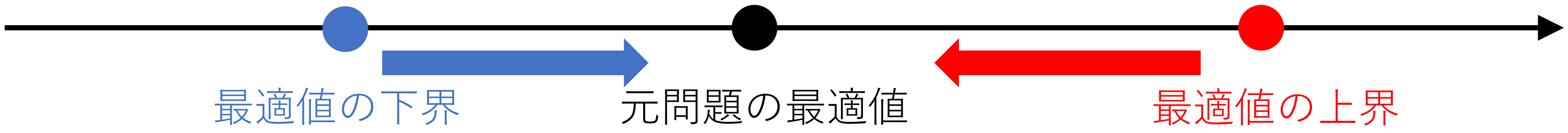
収束条件を満たすまで以下を繰り返し

- 劣勾配$\delta(u) = \tilde{x}_{ij}^t - \sum_{k \le t} \tilde{y}_j^k$を計算
- ラグランジュ乗数の更新 Set $u_{ij}^t := \max\{u_{ij}^t + \pi \cdot \delta_{ij}^t(u), 0\} \; \forall\, i \in I,\;\; j \in J$ and $t \in T$.
- ラグランジュ緩和問題を解き最適解$(\tilde{x}, \tilde{y})$と最適値$L(u)$を得る.
  If $(Z_{LB} < L(u))$, then下界$Z_{LB} = L(u)$

下界を大きく

- 最適施設配置$\tilde{y}$を元にヒューリスティクスで実行可能解を生成. 最適値$val(HEUT(\tilde{y}))$
  If $(Z_{UB} > val\big(HEUT(\tilde{y})\big) + + \sum_t \sum_j f_j^t \tilde{y}_j^t)$, then上界$Z_{UB} = val\big(HEUT(\tilde{y})\big) + \sum_t \sum_j f_j^t \tilde{y}_j^t$

上界を小さく



研究の構成

1. Introduction
   - 既往研究と本研究の位置付け

2. A mathematical programming formulation of MISFLP

3. The allocation subproblem
   - 需要の割り当て問題の効率的解法

4. Lagrangean relaxation
   - ラグランジュ緩和問題→元問題の下界を得る

5. Algorithm
   - 解法：劣勾配法とヒューリスティクスの組み合わせ

6. Computational study
   - 最適化ソルバー（CPLEX）との比較（計算時間, gap）
   - 静的施設配置問題との比較

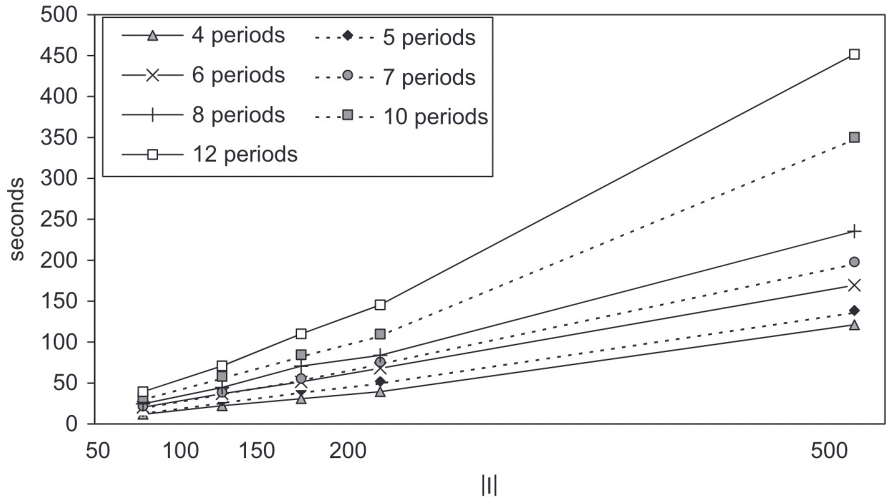
数値実験1.1 各期に1施設を追加するとき

- 全需要{50, 100, 150, 200, 500}, 施設候補地{8, 10, 12, 15, 20, 30}, 計画期間{4,5,6,7,8,10,12}
  → 全組み合わせに対してパラメータをランダムに設定した10インタスタンスを作成
  → 上下界ギャップ$(100(Z_{UB} - Z_{LB})/Z_{LB})$と計算時間を確認

結果：gap, 計算時間共にvery good

- 上下界ギャップは平均2.75%程度, 最大でも3.71%
  → 提案手法により最適解に非常に近い実行可能解を得られる
- CPU時間は最大でも448.51秒（全需要500, 施設候補30, 計画期間12, 決定変数18万個）
  → 大規模化への対応◎

施設候補30のとき,
全需要・計画期間と計算時間の関係→



ソルバー（CPLEX）との比較

最適解の求解

- CPLEXでは中程度（計画期間8以上, 需要150以上）の問題でも2時間以内に計算終わらず
  → 本問題の難しさを示している
- 539/600インスタンスで，提案手法で得られた解はCPLEXで得られた最適解と同等
  → 提案手法の解とCPLEXの解のgapは最大0.03 (extremely good)
- 大規模な問題設定では，提案手法の解はCPLEXが2時間かけて見つけた最適解より良い

線形緩和問題の求解（下界を求める）

- 小規模問題ではCPLEXによる線形緩和の方が高速に下界を求められる
- ただし大規模化すると提案手法の方が高速に下界を求められる+上界も求められる

本問題を厳密に解くのは非常に時間がかかるが，提案手法だと小さい計算時間で
ほぼ最適解に近い実行可能解を得られる

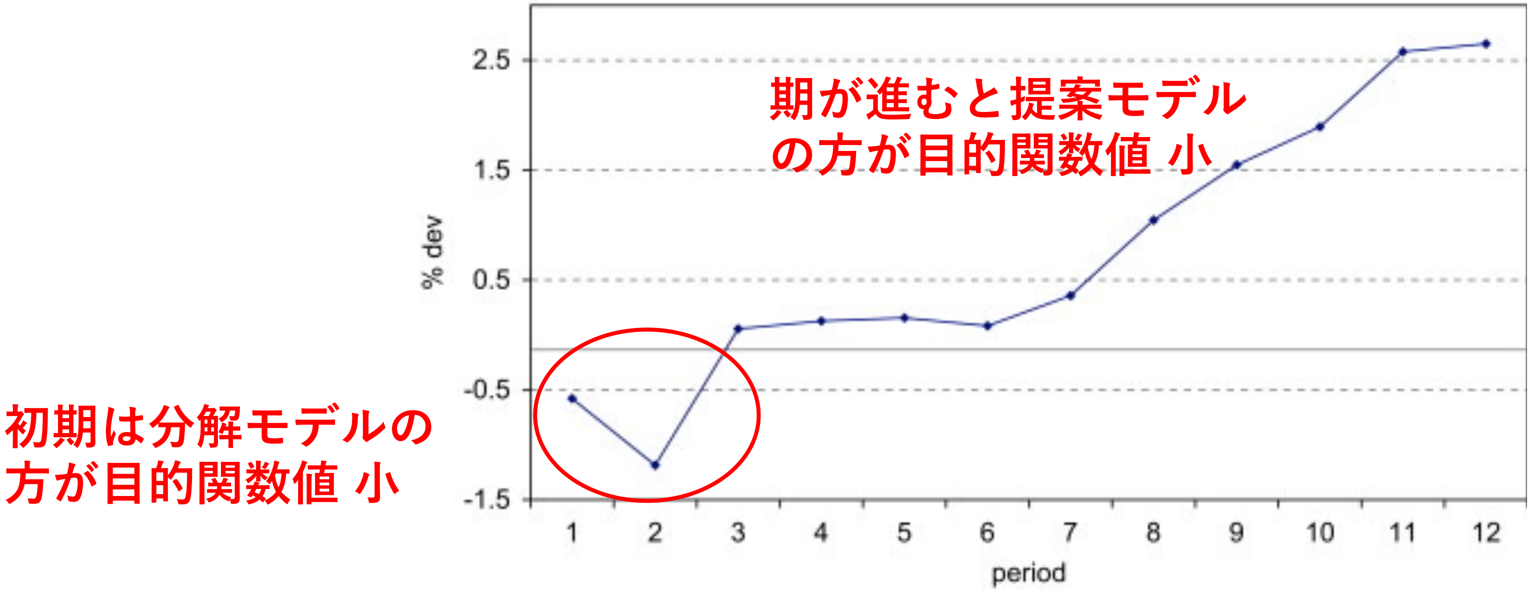
数値実験2 静的モデルの繰り返しと動的モデルの比較

- 提案モデル = 計画期間に渡る時系列の施設配置を一つの問題として解く
- 分解モデル = 各期で静的な施設配置問題を解く（myopic）

結果：分解モデルは近視眼的・貪欲に振る舞う

- 分解モデルは初めは良い解（最適値が小さい）を返すが，以降の期間のコストを考えないため，期が進むにつれて悪い解になる

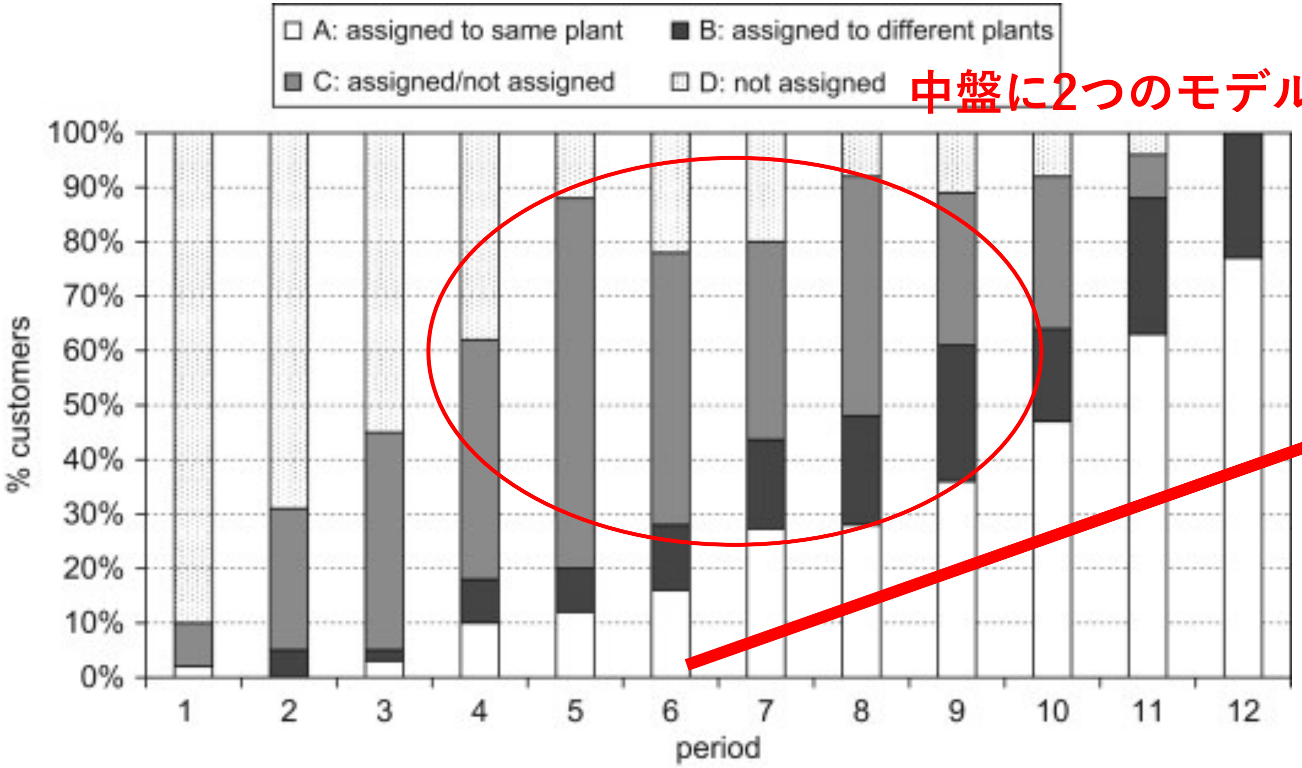
(分解モデルの目的関数値)-(動的モデルの目的関数値) [%]



数値実験2 静的モデルの繰り返しと動的モデルの比較

解の比較

- 2つのモデルで，同じ期に建設される施設の数は50%以下
- 各期において提案モデルと分解モデルでの需要の割り当て結果を示す↓



中盤に2つのモデルの差が顕著

期が進むにつれて同じ施設に割り当てられる需要が増加

その他の数値実験

- 各期に1施設以上の施設を建設できる場合
  → 1施設の施設を建設できる場合と同じ結果（小計算時間, 小gap）
- 計画期間を1期として，*p*-median問題を解く
  - 既知の40インスタンスを対象に計算
  - 提案手法による上界，下界と最適値の差は非常に小さい
  - 提案手法による最適値と最適値との差は平均0.26%

  → *p*-median問題の専用の解法ではないがとても良い性能を示した
- 計画期間内の意思決定時点の決定
  - 計画期間が1年なら，1ヶ月ごとに意思決定するか4ヶ月ごとにするか
  - 計画期間の初めに全期の決定をすると，全期間を通じて満たす需要は大だが運用費も大.
    一方，計画期間の終わりに全期の決定をすると，運用費小だが満たす需要も小.
    → 意思決定タイミングによるコストとサービスレベルのトレードオフを分析

結論

- 多期間の動的施設配置問題を定式化
- 問題の性質（需要の割り当て問題の係数行列が完全ユニモジュラ）を利用して，ラグランジュ緩和に基づく解法を提案
- 数値実験により，問題の複雑性にも関わらず小さな計算時間でかなり良い解を見つけることができることを示した
- 多期間の動的な最適化問題を静的な問題に分解するのではなく，一つの最適化の枠組みで扱うことの重要性を示した

発展の方向性：

- *p*-center型の問題への発展（割り当てコストの最大値を最小化）
- カバー半径が時間と共に減少する最大カバー問題

所感

- 問題の性質を利用して効率的な解法を提案したり，得られた解の信頼度を示すため上界と下界を求めるというORの考え方が勉強になった
- 解法を工夫してソルバーより圧倒的に良い手法を提案したインパクトが大きい
- 一方で，将来の需要が既知という仮定はつよい．
将来の状態に確率的な遷移を過程するなら，リアル・オプションのような投資理論+強化学習という方向の研究が考えられる
- 解の中身が気になった．将来の人口減少や需要の偏在などのシナリオのもと，線型都市や実ネットワークで，静的問題と動的問題の解の差をグラフィカルに示すのが，都市・交通分野の研究だと求められる
- 人口減少社会での施設の統廃合・再配置，公共交通のネットワークデザインなど，動的な配置の解の性質を理論的に示す際に，このようなアプローチが参考になると思った

（補足）全需要カバーの制約をなくす方法

- 最終期に全需要がカバーされる仮定を除くには，以下のコストのダミー施設を加えるだけ

$$f_j^t = \begin{cases} \infty & t < T \\ 0 & t = T \end{cases} \quad \text{and} \quad c_{ij}^t = \begin{cases} \infty & t < T, \\ \gamma & t = T, \end{cases}$$

- 建設費・維持管理費f_j^tと割り当てコストc_{ij}^tが最終期以外∞

→ ダミー施設は最終期以外は配置されず割り当てられない

- 最終期の建設費・維持管理費$f_j^t = 0$, 割り当てコスト$c_{ij}^t = \gamma$

→ ダミー施設は最終期に配置される.

γでダミー施設に割り当てられる人口（実際の施設に割当てられない人口）を操作する

（補足）利益最大化問題への書き換え

商業施設の配置問題など利益最大化の場合

- 各期の満たすべき需要の制約はない（$n^t = 0$）
- 顧客iにt期にサービスを供給することによる利益g_i^tを考慮する必要

→ 割り当てコストを以下のように変更し，コスト最小化の枠組みで解ける

$$\hat{c}_{ij}^t = c_{ij}^t - g_i^t$$

参考文献

ラグランジュ緩和について

- 田中俊二. (2017). 大規模組合せ最適化問題に対する数理アプローチの基礎. *計測と制御*, *56*(12), 967-972. https://www.jstage.jst.go.jp/article/sicejl/56/12/56_967/_pdf
- 宮本裕一郎. (2013). 数理最適化入門 (3): ラグランジュ緩和と劣勾配法 (チュートリアル). *応用数理*, *23*(3), 129-134. https://www.jstage.jst.go.jp/article/bjsiam/23/3/23_KJ00008829092/_pdf

多設備拡張モデルの動的計画法・ラグランジュ緩和による解法

- 馬郡英樹, & 横山隆一. (2003). 多設備拡張計画問題のモデルとその解法について. *電気学会論文誌 B (電力・エネルギー部門誌)*, *123*(12), 1562-1572. https://www.jstage.jst.go.jp/article/ieejpes/123/12/123_12_1562/_pdf

動的施設配置問題

- 鈴木勉. (2014). 周期的人口変動下での動的施設配置とコンパクト化の有効性に関する研究. *都市計画論文集*, *49*(3), 591-596. https://www.jstage.jst.go.jp/article/journalcpij/49/3/49_591/_article/-char/ja/

とか