Sheffi, Y. :
Urban Transportation Networks (Chapter 12),
Prentice Hall, pp. 309-344, 1985

Sheffiゼミ#4

2013/05/21

D1 浦田淳司

章の構成･内容

12. Stochastic User Equilibrium

12.1 SUE Equivalent Minimization

12.2 Solution Algorithm

12.3 More about stochastic user equilibrium

12.4 Summary

･リンクの旅行時間はランダムかつ交通量依存

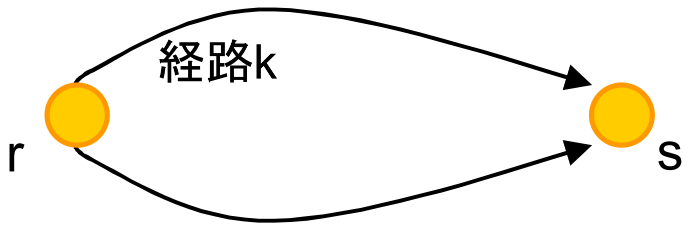
･旅行時間のランダム性はドライバーの認知誤差から生じる

･12.1では制約なしの最小化問題を解く（目的関数の設定に制約条件が内包されている）

･12.2ではMSA法で解を求める（平均から探索方向を決める？）

･12.3ではprobit SUEに関する問題などを説明する

基本的な条件の整理



OD交通量　qrs

認知旅行時間 $C_k^{rs} = \sum_a T_a \delta_{a,k}^{rs}$

経路kの選択確率

$$P_k^{rs}(t) = \Pr(C_k^{rs} \le C_l^{rs},\ \forall l \ne k \mid t)$$

rs間の経路k交通量

$$f_k^{rs} = q_{rs} P_k^{rs} \qquad [12.1]$$

リンクaの旅行時間

$$t_a = t_a(x_a) \qquad [12.2a]$$

rs間の交通量保存

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad [12.2b]$$

経路kの交通量条件

$$f_k^{rs} > 0 \quad \text{implies} \quad c_k^{rs} \le c_l^{rs} \qquad [12.6a]$$

$$f_k^{rs} = 0 \quad \text{implies} \quad c_k^{rs} \ge c_l^{rs} \qquad [12.6b]$$

目的関数の設定と例題

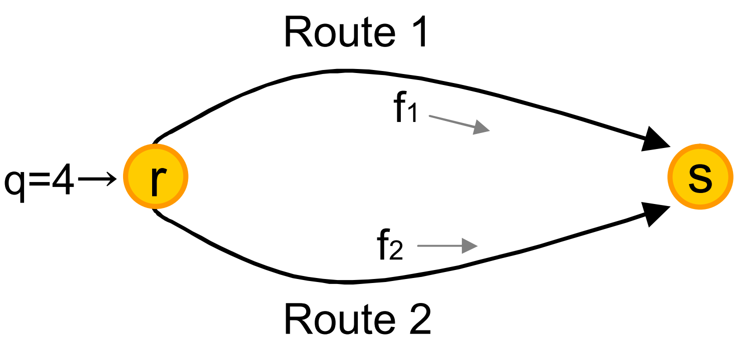
まずは，こうおいてみる.

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} E\left[\min\{C_k^{rs}\} \mid c^{rs}(x)\right] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega \qquad [12.7]$$

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} \boxed{S_{rs}[c^{rs}(x)]} + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega \qquad [12.8]$$

expected perceived travel time

$$\frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} = P_k^{rs} \qquad [12.10]$$



経路交通量と旅行時間

$$c_1 = 1 + 2 f_1$$
$$c_2 = 2 + f_2 \qquad [12.11a,b]$$

選択確率はロジット型を仮定

$$\frac{f_1}{4} = P_1 = \frac{e^{-c_1}}{e^{-c_1} + e^{-c_2}} = \frac{1}{1 + e^{c_1 - c_2}} \qquad [12.11c]$$

$$\frac{f_1}{4} = \frac{1}{1 + e^{(3 f_1 - 5)}}$$

$$f_1 = 1.75, \quad f_2 = 2.25$$
$$c_1 = 4.50, \quad c_2 = 4.25$$
$$P_1 = 0.438$$

続き：例題（目的関数の設定）

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}[c^{rs}(x)] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$ [12.8]

[12.11]式を代入

$$\min z(f_1, f_2) = -4S[c_1(f_1), c_2(f_2)] + f_1(1+2f_1) + f_2(2+f_2) - \int_0^{f_1}(1+2\omega)d\omega - \int_0^{f_2}(2+\omega)d\omega$$ [12.13a]

$$\min z(f_1, f_2) = -4S[c_1(f_1), c_2(f_2)] + f_1^{\,2} + \frac{1}{2}f_1^{\,2}$$ [12.13b]

目的関数zの最小値を算出

$$\frac{\partial z(f_1, f_2)}{\partial f_1} = -4\frac{\partial S[c_1(f_1), c_2(f_2)]}{\partial c_1}\frac{dc_1(f_1)}{df_1} + 2f_1$$

$$\frac{\partial z(f)}{\partial f_1} = -4P_1 \cdot 2 + 2f_1 = -8P_1 + 2f_1 = 0$$ [12.14a]

$$\frac{\partial z(f)}{\partial f_2} = -4P_2 \cdot 1 + f_2 = -4P_2 + f_2 = 0$$ [12.14b]

$$-8P_1 + 2f_1 - 8P_2 + 2f_2 = 0$$

⇒ $f_1 + f_2 = 4$ [12.15]　（ $P_1 + P_2 = 1$ ）より

フロー保存則が導出

[12.15]式を[12.14a]式に代入，ロジット型の選択確率を仮定

$$f_1 = \frac{4}{1 + e^{(3f_1 - 5)}}$$ [12.16]

例題：図解

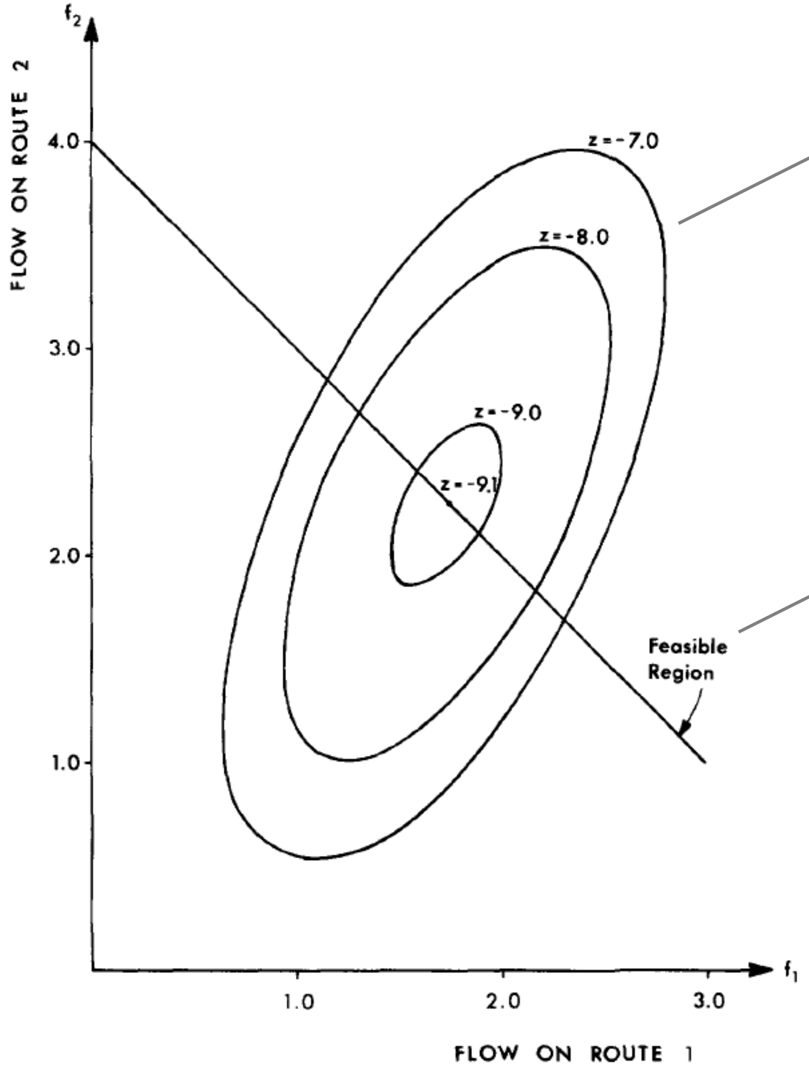


Figure 12.2 Contour lines of the SUE objective function for the network example in Figure 12.1 (Eq. [12.13] with $S[c(f)] = -\ln\,[e^{-c_1(x_1)} + e^{-c_2(x_2)}]$). The line shows the locus of points meeting the flow conservation condition. Note that the minimum of the objective function is on the line.

$$z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}[c^{rs}(x)] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

$$f_1 + f_2 = 4$$

目的関数とSUEの等価性

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}[c^{rs}(x)] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \qquad \text{[12.8]}$$

目的関数zの最小値を算出には，次が必要

$$\nabla z(x) = 0 \qquad \text{[12.17]}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left\{-\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}\left[c^{rs}(x)\right]\right\} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} \frac{\partial c_k^{rs}(x)}{\partial x_b} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \frac{dt_b}{dx_b} \delta_{b,k}^{rs} \qquad \text{[12.18]}$$

$$\frac{\partial c_k^{rs}(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\sum_a t_a(x_a)\delta_{a,k}^{rs}\right] = \frac{dt_b(x_b)}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs} \qquad \text{[12.19b]}$$

$$\frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} = P_k^{rs} \qquad \text{[12.19a]}$$

目的関数とSUEの等価性

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}[c^{rs}(x)] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega \qquad [12.8]$$

目的関数zの最小値を算出には，次が必要

$$\nabla z(x) = 0 \qquad [12.17]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left\{-\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}\left[c^{rs}(x)\right]\right\} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} \frac{\partial c_k^{rs}(x)}{\partial x_b} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \frac{dt_b}{dx_b} \delta_{b,k}^{rs} \qquad [12.18]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_b}\left[\sum_a x_a t_a(x_a)\right] = t_b + x_b \frac{dt_b}{dx_b} \qquad [12.21]}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_b}\left[-\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega\right] = -t_b \qquad [12.22]}$$

目的関数とSUEの等価性

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}[c^{rs}(x)] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \quad [12.8]$$

目的関数zの最小値を算出には，次が必要

$$\nabla z(x) = 0 \quad [12.17]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left\{-\sum_{rs} q_{rs} S_{rs}\left[c^{rs}(x)\right]\right\} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} \frac{\partial c_k^{rs}(x)}{\partial x_b} = -\sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \frac{dt_b}{dx_b} \delta_{b,k}^{rs} \quad [12.18]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left[\sum_a x_a t_a(x_a)\right] = t_b + x_b \frac{dt_b}{dx_b} \quad [12.21]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\left[-\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega\right] = -t_b \quad [12.22]$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \left[-\sum_{rs}\sum_k q_{rs} P_k^{rs} \delta_{b,k}^{rs} + x_b\right] \frac{dt_b(x_b)}{dx_b} = 0 \quad [12.23]$$

$$\vee \atop 0$$

$$x_b = -\sum_{rs}\sum_k q_{rs} P_k^{rs} \delta_{b,k}^{rs} \quad [12.24]$$

等価

rs間の経路k交通量

$$f_k^{rs} = q_{rs} P_k^{rs} \quad [12.1]$$

解の一意性の証明

（目的関数zのヘッセ行列が正定値⇔2階微分の対角行列が正　であれば，解は一意）

■目的関数の1階微分

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \left[-\sum_{rs}\sum_{k} q_{rs} P_k^{rs} \delta_{b,k}^{rs} + x_b\right]\frac{dt_b(x_b)}{dx_b} \qquad [12.23]$$

■目的関数の2階微分

$$\frac{\partial z^2(x)}{\partial x_b \partial x_a} = \left[-\sum_{rs}\sum_{k} q_{rs} \sum_{l} \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \frac{\partial c_l^{rs}}{\partial x_a} \delta_{b,k}^{rs} + \frac{\partial x_b}{\partial x_a}\right]\frac{dt_b}{dx_b} + \left[-\sum_{rs}\sum_{k} q_{rs} P_k^{rs} \delta_{b,k}^{rs} + x_b\right]\frac{d^2 t_b}{dx_b dx_a}$$

$$\boxed{\frac{\partial c_l^{rs}}{\partial x_a} = \frac{dt_a}{dx_a}\delta_{a,l}^{rs}} \qquad \boxed{\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = \begin{cases} 1 & \text{if a=b} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}} \qquad [12.29]$$

$$\frac{\partial z^2(x)}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} \left[-\sum_{rs} q_{rs} \sum_{k}\sum_{l} \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] + \frac{dt_b}{dx_b} + \left[-\sum_{rs}\sum_{k} q_{rs} P_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + x_b\right]\frac{d^2 t_b}{dx_b^2} & \text{if a=b} \\ \left[-\sum_{rs} q_{rs} \sum_{k}\sum_{l} \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \left(\frac{dt_a}{dx_a}\delta_{a,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] & \text{otherwise} \end{cases} \qquad [12.30]$$

解の一意性の証明

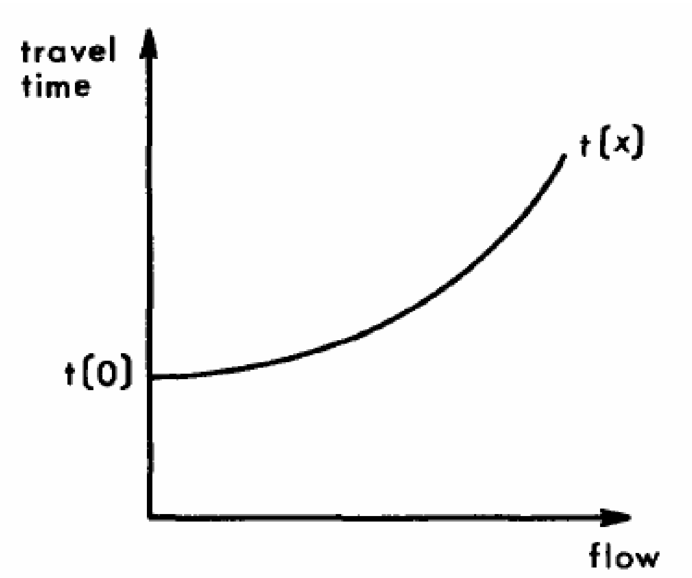
$$\frac{\partial z^2(x)}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} \left[\boxed{-}\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \sum_l \boxed{\frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}}} \left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] + \frac{dt_b}{dx_b} + \left[-\sum_{rs}\sum_k q_{rs} P_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + x_b\right]\frac{d^2 t_b}{dx_b^2} & \text{if a=b} \\ \left[-\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \sum_l \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \left(\frac{dt_a}{dx_a}\delta_{a,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad [12.30]$$

リンク間相互作用がない場合は0（chap.8）

非負行列　　t(x)は単調増加関数なので正

$$\frac{\partial S_{rs}(c^{rs})}{\partial c_k^{rs}} = P_k^{rs} \quad [12.10]$$

*S*は凹関数なので，Pの微分は負



解の一意性の証明

$$\frac{\partial z^2(x)}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} \left[-\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \sum_l \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] + \frac{dt_b}{dx_b} + \left[-\sum_{rs}\sum_k q_{rs} P_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + x_b\right]\frac{d^2 t_b}{dx_b^2} & \text{if a=b} \\ \left[-\sum_{rs} q_{rs} \sum_k \sum_l \frac{\partial P_k^{rs}}{\partial c_l^{rs}} \left(\frac{dt_a}{dx_a}\delta_{a,l}^{rs}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{b,k}^{rs}\right)\right] & \text{otherwise} \end{cases} \qquad [12.30]$$

リンク間相互作用がない場合は0（chap.8）

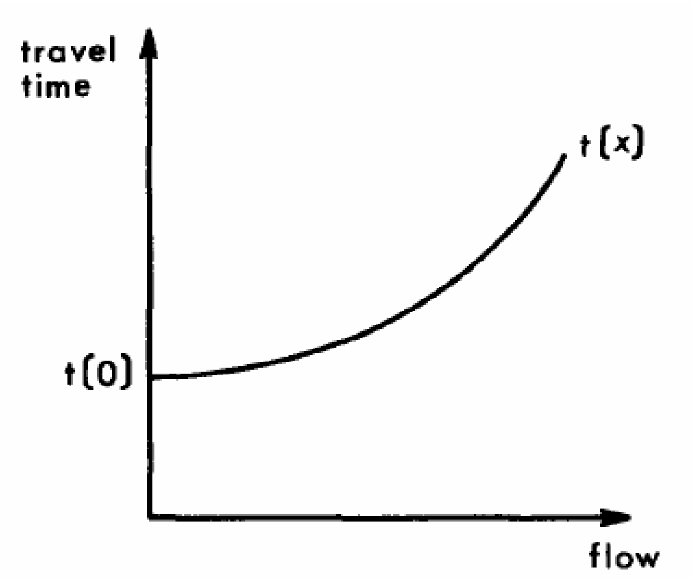
t(x)は単調増加関数なので正

t(x)は下に凸なので正

収束計算そのもの $\left[-\sum_{rs}\sum_k q_{rs} P_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} + x_b\right] \to 0$

正とも負ともいえない

収束すると0なので狭義に凸であり，解はある.
正定値ではないので，解の唯一性の証明はまだ.



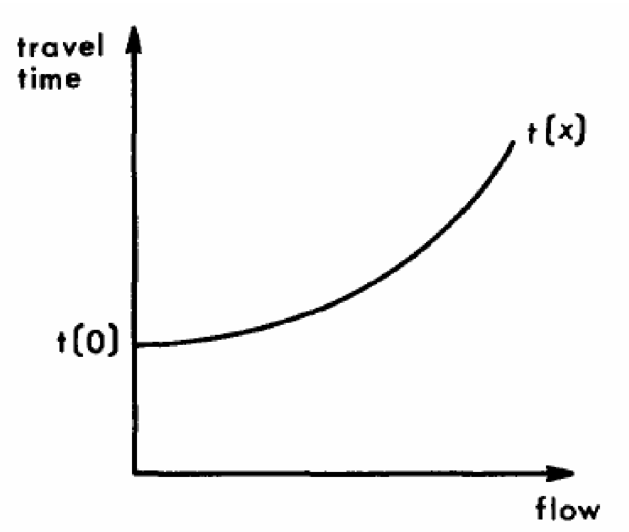
解の一意性の証明

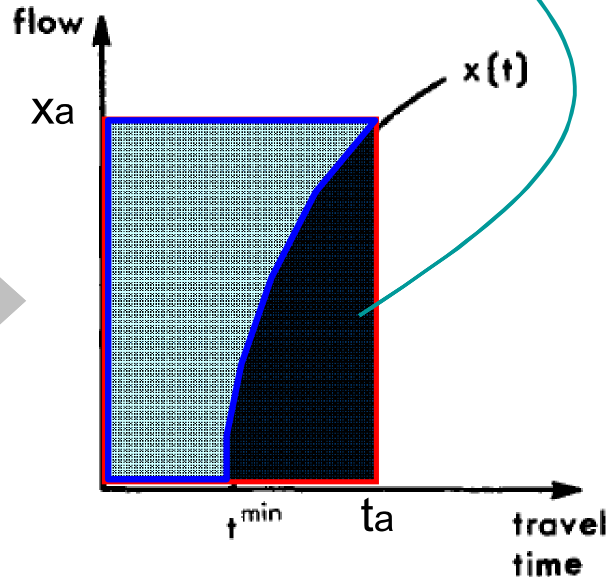
t(x)の逆関数（x(t)）を設定

$$z(t) = -\sum_{rs} q_{rs} E\left[\min\{C_k^{rs}\} \mid c^{rs}\right] + \sum_a \boxed{x_a(t_a)t_a} - \sum_a \boxed{\int_{t_{\min}}^{t_a} v \frac{dx_a(v)}{dv} dv} \qquad [12.33]$$

$$z(t) = -\sum_{rs} q_{rs} E\left[\min\{C_k^{rs}\} \mid c^{rs}\right] + \sum_a \boxed{\int_{t_{\min}}^{t_a} x_a(v) dv} \qquad [12.34]$$

正かつ単調増加，1階微分も正の関数





最適化アルゴリズム：凸結合法

■最小化目的関数

$$\min_x z(x) = -\sum_{rs} q_{rs} E\left[\min\{C_k^{rs}\} \mid c^{rs}(x)\right] + \sum_a x_a t_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega \quad [12.37]$$

■最適化アルゴリズム復習

$$x^{n+1} = x^n + \alpha_n \cdot d^n \quad [12.38]$$

ステップサイズ

勾配ベクトル

目的変数の1階微分の逆ベクトル（12.23より）

x^nとその方向の
最小点から算出

$$d_a^n = \Bigg[\underbrace{\sum_{rs} q_{rs} \sum_k P_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}}_{= y_a^n} - x_a\Bigg] \quad [12.39]$$

$$d_a^n = y_a^n - x_a^n$$

■最適化アルゴリズムの問題点

1. 毎回勾配ベクトルを求める必要あり.
   ベクトルが妥当な方向ではない場合あり（yにランダム性（確率的）があるため）
2. 式12.37の期待認知旅行時間Eの算出の計算負荷が高い

Method of Successive Averages

■ステップサイズは所与とする

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n < \infty \end{cases} \quad [12.44]$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ → nの減少関数であるが，すぐに収束しない（最小値になるまで続く）

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n < \infty$ → 確率的に与えられるyの分散はxの分散より小さい（n→∞で0）

$$\mathrm{var}(X_a^n) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{l=1}^{n-1} \mathrm{var}(Y_a^l) \qquad [12.49]$$

■ α=1/nとすると

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{n}(y^n - x^n) \qquad [12.46]$$

$$x^{n+1} = \frac{n-1}{n} x^n + \frac{1}{n} y^n$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(x^{n-1} + \frac{1}{n-1}(y^{n-1} - x^{n-1})\right) + \frac{1}{n} y^n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} y^l \qquad [12.47]$$

なお，$\alpha_n = \dfrac{k_1}{k_2 + n}$ と一般化できる

収束計算のフロー

とくに変わりはありませんが，，，

Step0: 初期化

n=1とし，$\{t_a^0\}$と与え，$\{x_a^1\}$を求める

Step1: 更新

$$t_a^n = t_a^n(x_a^n)$$

Step2: 勾配ベクトルの決定

$\{t_a^n\}$から$\{y_a^n\}$を求める

Step3: 経路交通量算出

$$x_a^{n+1} = x_a^n + (1/n)(y_a^n - x_a^n)$$

Step4: 更新幅が基準値より大きければ，step1へ戻り，繰り返し.

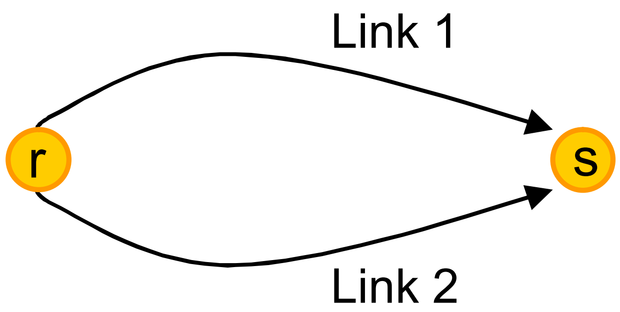
小さければそこで終了.

→{x}は確率的に与えられるため，更新幅は単調減少ではない.

そこで，m回平均の比較で更新幅を算出.

$$\frac{\sqrt{\sum_a \left(\bar{x}_a^{n+1} - \bar{x}_a^n\right)^2}}{\sum_a \bar{x}_a^n} \le \kappa \quad \left(\bar{x}_a^n = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} x_a^{n-l} \right)$$

計算例



$$t_1 = 1.25\left[1 + \left(\frac{x_1}{800}\right)^4\right]$$

$$\frac{x_1}{q} = \frac{1}{1 + e^{\theta(t_1 - t_2)}}$$

$$t_2 = 2.50\left[1 + \left(\frac{x_2}{1200}\right)^4\right]$$

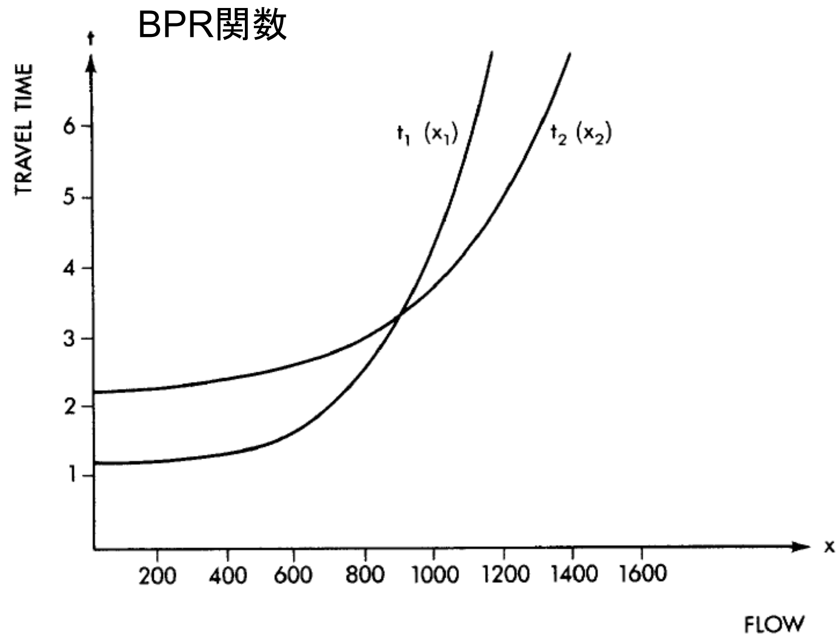


Figure 12.4 Network example with two paths connecting a single O–D pair.

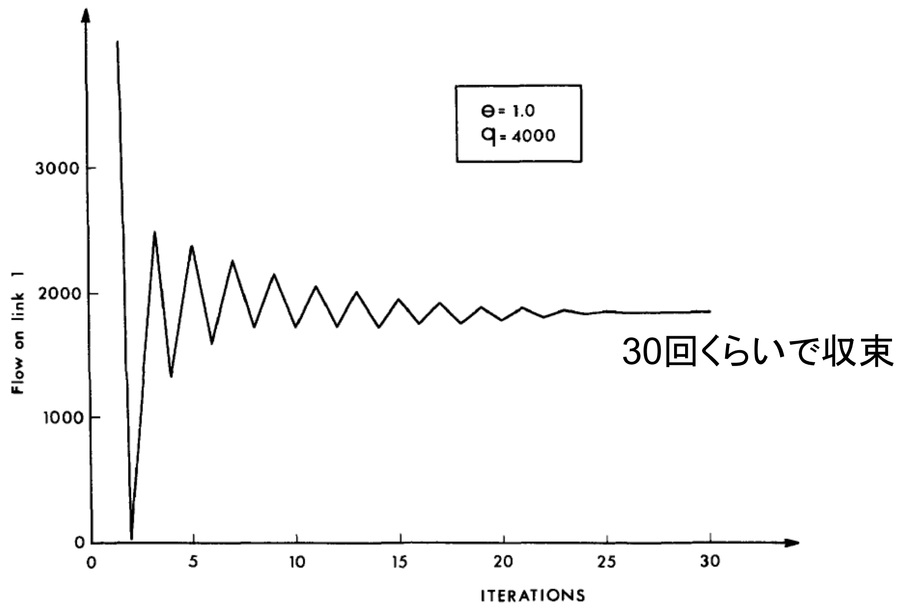
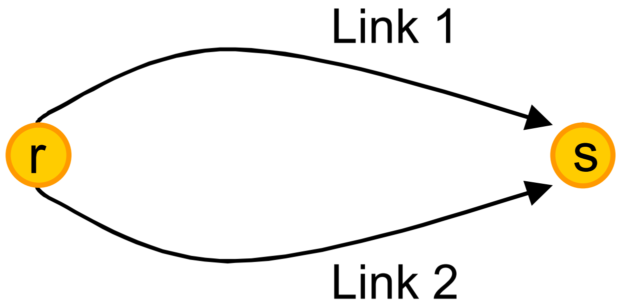


Figure 12.5 Convergence pattern of the MSA for the network in Figure 12.4; the case of relatively large perception variance ($\theta = 1.0$) and relatively high congestion level ($q = 4000$).

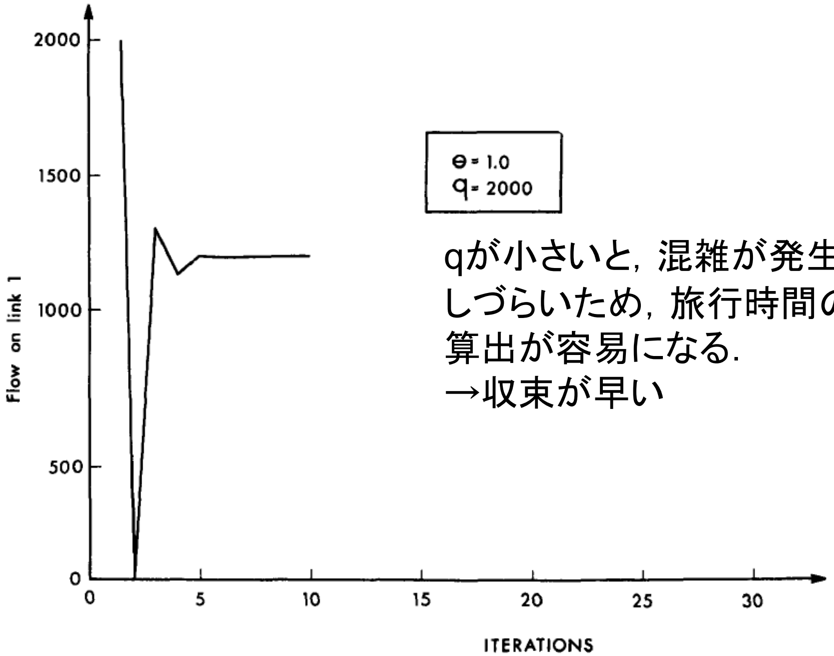
計算例



$$t_1 = 1.25\left[1 + \left(\frac{x_1}{800}\right)^4\right]$$

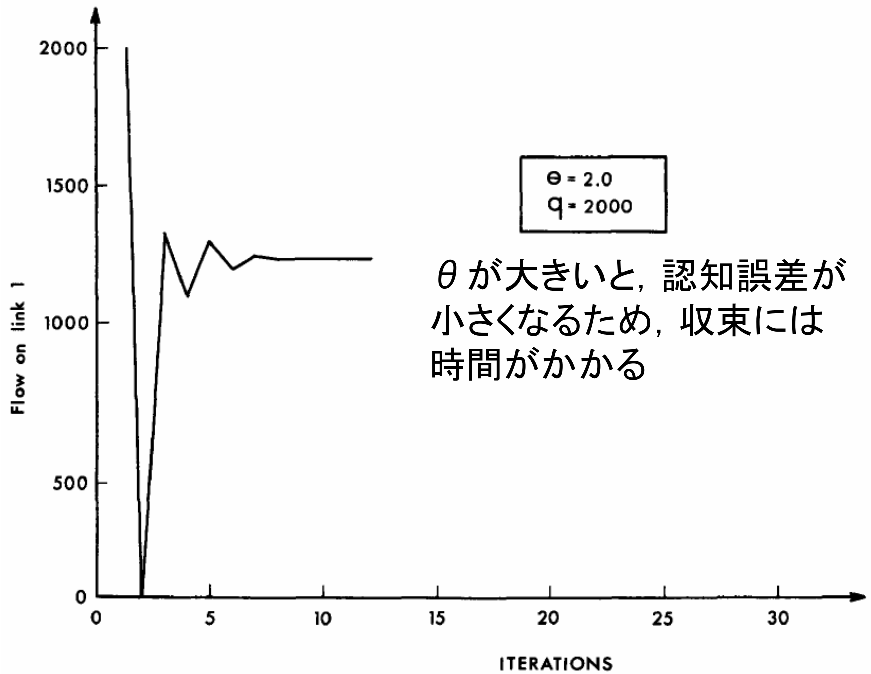
$$\frac{x_1}{q} = \frac{1}{1 + e^{\theta(t_1 - t_2)}}$$

$$t_2 = 2.50\left[1 + \left(\frac{x_2}{1200}\right)^4\right]$$



qが小さいと，混雑が発生しづらいため，旅行時間の算出が容易になる．
→収束が早い

Figure 12.6 Convergence pattern of the MSA for the network in Figure 12.4; the case of relatively large perception variance ($\theta = 1.0$) and relatively low congestion level ($q = 2000$).



θ が大きいと，認知誤差が小さくなるため，収束には時間がかかる

Figure 12.7 Convergence pattern of the MSA for the network in Figure 12.4; the case of relatively small perception variance ($\theta = 2.0$) and relatively low congestion level ($q = 2000$).

SUE諸々: プロビット型SUE

■2種類の収束計算が存在

inner: サンプリングと配分の収束計算(chap.11)

outer: 均衡の収束計算(chap.12)

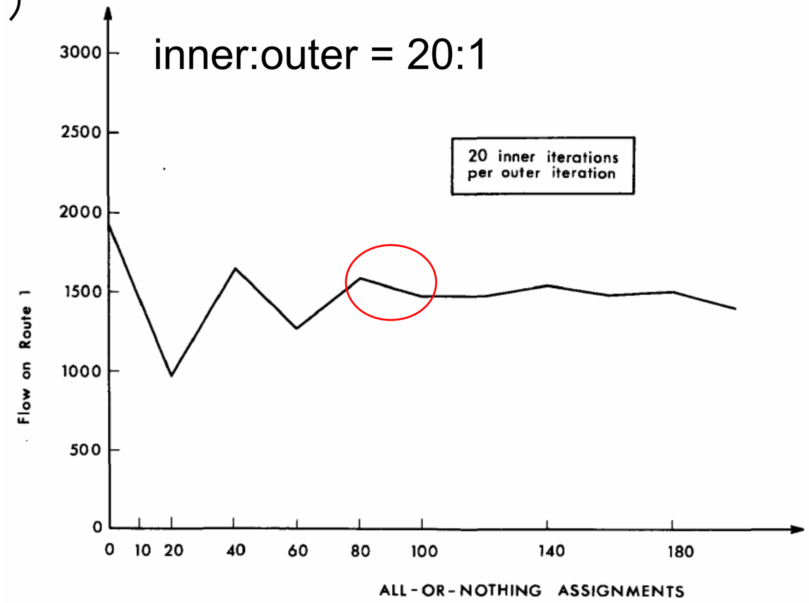
$$T_1 \sim N(t_1, \beta t_1^0)$$

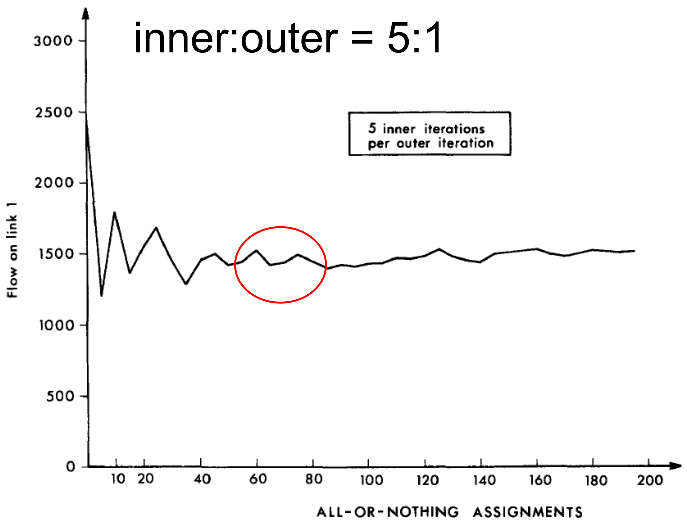
$$T_2 \sim N(t_2, \beta t_2^0)$$

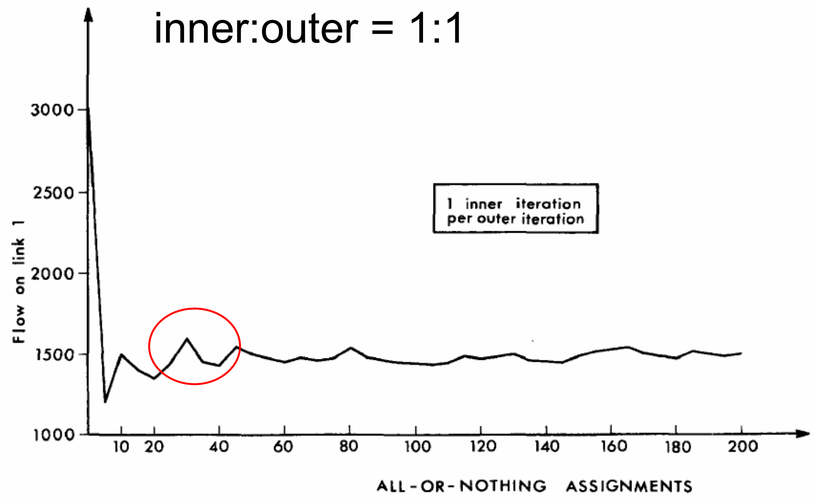
$$\mathrm{cov}(T_1, T_2) = 0$$

$$x_1 = q \Pr(T_1 \le T_2)$$

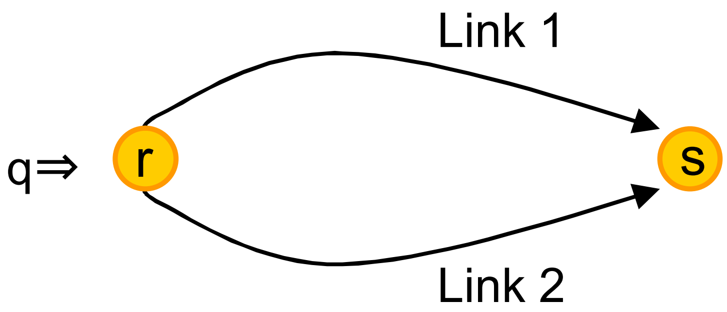
$$x_2 = q - x_1$$





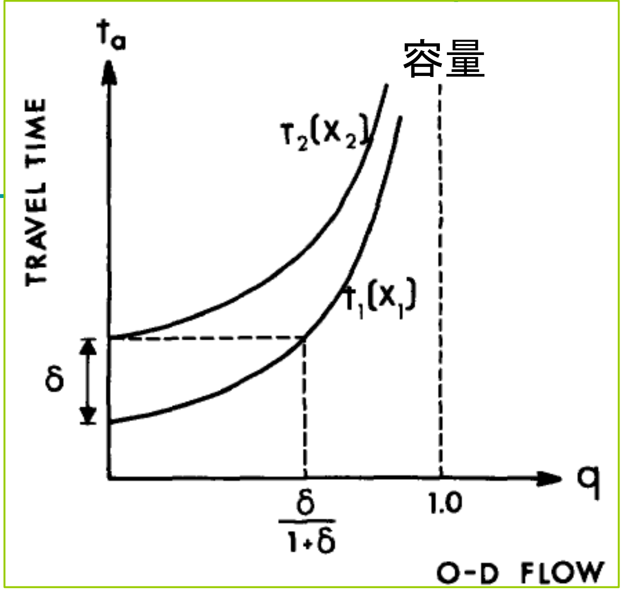


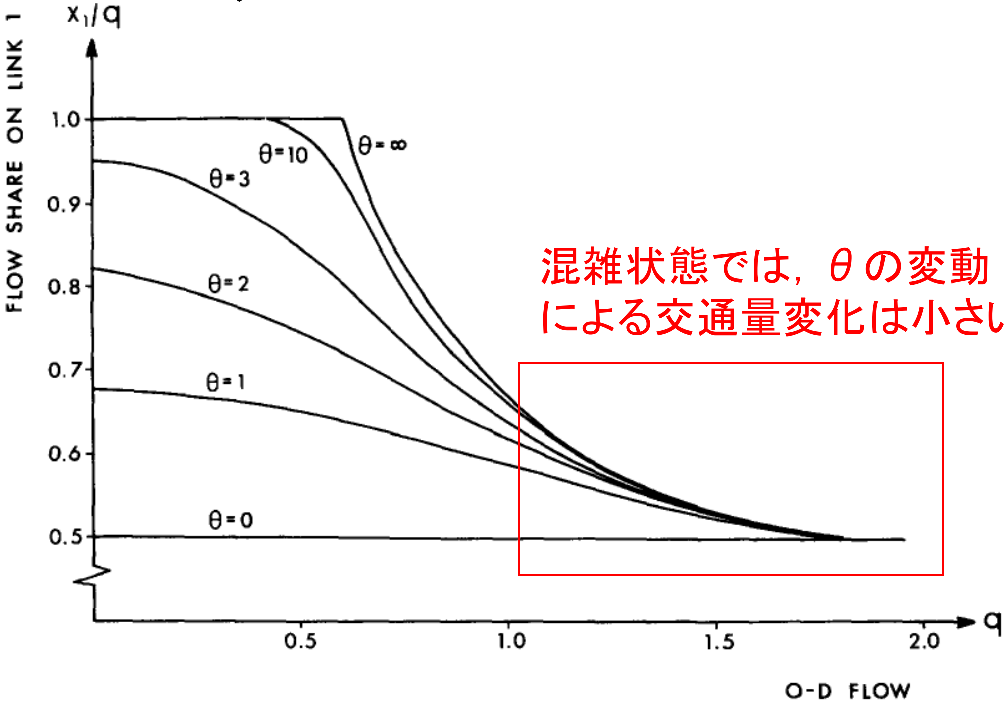
SUE諸々: UEとSUEの違い



$$t_1 = \frac{1}{1-x_1} \qquad \frac{x_1}{q} = \frac{1}{1+e^{\theta(t_1-t_2)}}$$

$$t_2 = \frac{1}{1-x_2} + \delta$$



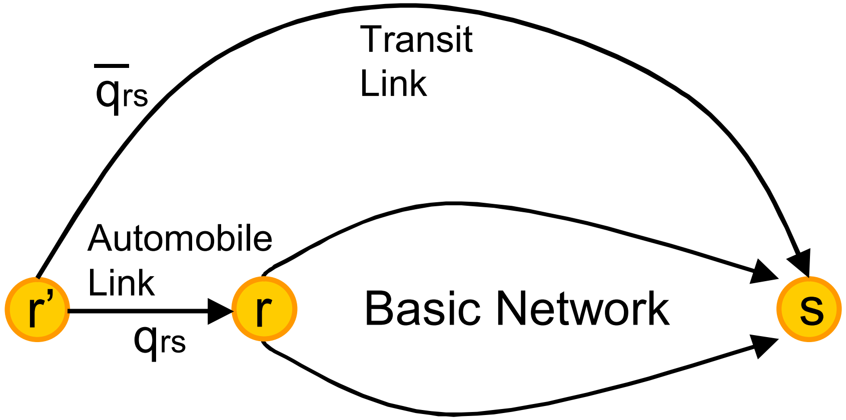


混雑状態では，θ の変動による交通量変化は小さい

非混雑状態ではSUEのほうがいいが，
混雑状態では計算性の問題もあり，UEのほうが適している

SUE諸々: 統合モデル(交通機関)

$$t_{r's} = -U_{tr} = \phi_1 - \phi_2 \hat{t} + \xi_{tr}$$



$$t_{r'r} = -U_{au} = -\phi_3 - \xi_{au}$$

$$U_{tr} = \phi_1 - \phi_2 \hat{t} + \xi_{tr}$$

$$(\xi_{tr}, \xi_{au}) \sim MVN\left[(0,0), \Sigma\right]$$

$$U_{au} = \phi_3 - t + \xi_{au}$$

・交通機関選択部分をプロビットモデル
・Basic Networkはロジットモデル

計算ステップ
a) Basic Network内の最短ペアを探索
b) プロビット部分の計算, Basic Networkへの流入量を算出
c) Basic Network内で配分

Sheffi ゼミ　完