URBAN TRANSPORTATION NETWORKS

Chapter6:
User Equilibrium with Variable Demand

Author: Yossi Sheffi

Prentice Hall, 134-163, October 1985

輪読ゼミ #1-3

2013/05/17

若林由弥

本章の流れ

0.需要関数の設定

1.最小化問題の定式化

2.解法アルゴリズム

3.ネットワーク表現による解法

 3-1.The Zero-Cost Overflow Formulation
 3-2.Excess-Demand Formulation

4.交通手段選択問題

5.まとめ

0.需要関数の設定

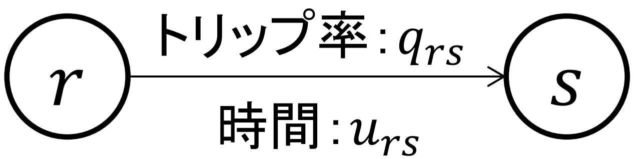
[Chapter3までのUEの仮定]

OD間のトリップ率が一定かつ既知

→実際はネットワークのLOSに影響を受けている

例)渋滞時に，別の交通手段を使う/時間をずらすなど

この現象を説明するために･･･



$$\boxed{q_{rs} = D_{rs}(u_{rs}) \quad \forall r,s}$$

r：出発ノード

s：到着ノード

q_{rs}：rs間のトリップ率

$D_{rs}(\cdot)$： rs間の需要関数

u_{rs}：rs間の移動時間

需要関数Dの特徴

- 式の形はどのODでも同じ
- 引数はuのみ
- uについて単調減少
- 上に有界

1.最小化問題の定式化

最小化問題

$$\min z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega - \boxed{\sum_{r,s} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\,d\omega} \quad (6.1a)$$

制約条件

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s \quad (6.1b)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad (6.1c)$$

$$\boxed{q_{rs} \geq 0 \quad \forall r,s} \quad (6.1d)$$

□で囲った部分を除くと需要固定型の場合と同じ問題になる

変数(q_{rs})が1つ増えただけ

a:リンク x_a:リンクaのフロー数

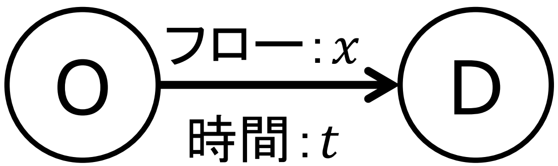
f_k^{rs}:rsを通るk番目のリンクのフロー数

q_{rs}:rsのフロー数

$t_a(\omega)$:リンクaのフロー数がωの時の旅行時間

1.最小化問題の定式化

具体例



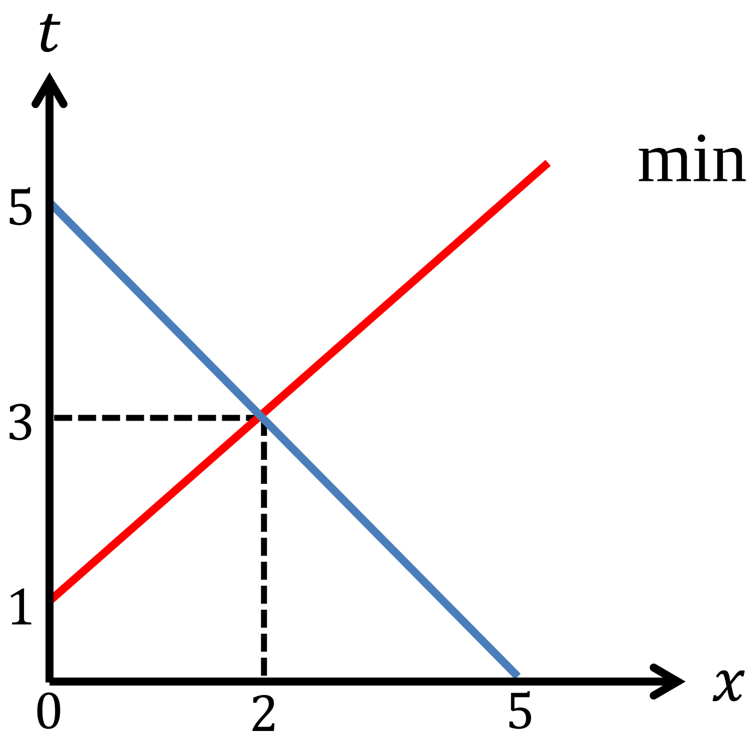
■リンクパフォーマンス関数

$$t = 1 + x \ (= t(x))$$

■需要関数

$$x = 5 - t(= D(t))$$

$$\leftrightarrow t = 5 - x(= D^{-1}(x))$$



$$\min z(x) = \int_0^x t(\omega) d\omega - \int_0^x D^{-1}(\omega) d\omega$$

$$= \int_0^x (1 + \omega) d\omega - \int_0^x (5 - \omega) d\omega$$

$$= x^2 - 4x$$

均衡点は

$$x = 2, t = 3$$

1.最小化問題の定式化

ラグランジュ関数を定義する

$$\min z(x,q) = \underbrace{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega}_{z_1(x)} - \underbrace{\sum_{r,s} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega}_{z_2(q)}$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad [6.4b]$$

$$q_{rs} \geq 0 \quad \forall r,s \quad [6.4c]$$

$$L(f,q,u) = z_1[x(f)] + z_2(q) + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right) \quad [6.4a]$$

1.最小化問題の定式化

第一条件を求めると…

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \ \ \forall k,r,s \ [6.5a]$$

$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \ \ \forall k,r,s \qquad [6.5b]$$

$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial u_{rs}} = 0 \ \ \forall r,s \ \ [6.5e]$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \ \ \forall k,r,s \qquad [6.5f]$$

$$q_{rs} \geq 0 \ \ \forall r,s \qquad [6.5g]$$

需要固定の場合と同じ式

$$q_{rs}\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial q_{rs}} = 0 \ \ \forall r,s \qquad [6.5c]$$

$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial q_{rs}} \geq 0 \ \ \forall r,s \qquad [6.5d]$$

需要変動型特有の式

1.最小化問題の定式化

$$L(f,q,u) = z_1[x(f)] + z_2(q) + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right) \quad [6.4a]$$

ラグランジュ関数Lのf, qそれぞれに関する偏微分は以下のよう

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}}\left\{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right)\right\}$$
$$= c_l^{mn} - u_{mn} \qquad [6.6]$$

c_l^{mn} : リンクmnに含まれるl番目のパスの旅行時間

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{mn}} = \frac{\partial}{\partial q_{mn}}\left[-\sum_{rs}\int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\,d\omega + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})\right]$$
$$= -D_{mn}^{-1}(q_{mn}) + u_{mn} \qquad [6.7]$$

1.最小化問題の定式化

第一条件の各式は次のように変形できる

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \ \forall k,r,s \Rightarrow \boxed{f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \ \forall k,r,s} \quad [6.8a]$$

$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \ \forall k,r,s \Rightarrow \boxed{c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 \ \forall k,r,s} \quad [6.8b]$$

利用者均衡条件

$$q_{rs}\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial q_{rs}} = 0 \ \forall r,s \Rightarrow \boxed{q_{rs}[u_{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs})] = 0 \ \forall r,s} \quad [6.8c]$$

$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial q_{rs}} \geq 0 \ \forall r,s \Rightarrow \boxed{u_{rs} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}) \geq 0 \ \forall r,s} \quad [6.8d]$$

需要変動条件

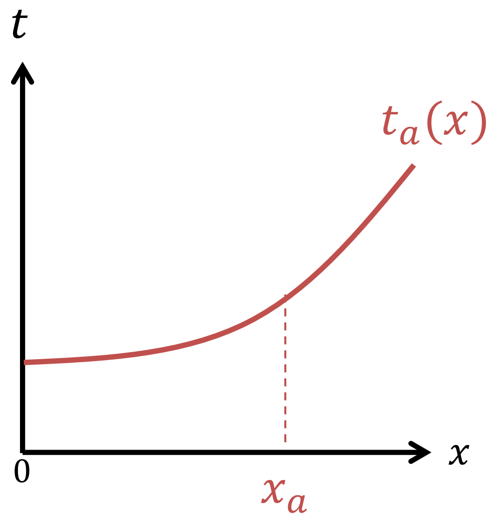
$$\frac{\partial L(f,q,u)}{\partial u_{rs}} = 0 \ \forall r,s \Rightarrow q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \geq 0 \ \forall r,s \quad [6.8e]$$

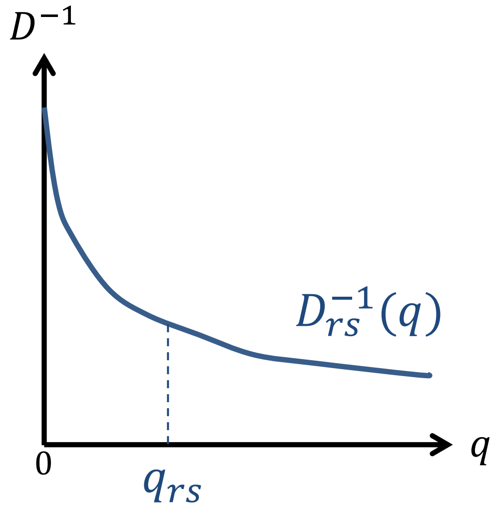
1.最小化問題の定式化

解の一意性について

$$\min z(x,q) = \underbrace{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega}_{\text{狭義に下に凸}} - \underbrace{\sum_{r,s} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\,d\omega}_{\text{狭義に上に凸}}$$

狭義に下に凸





⇒ x, qについて解の一意性が示された

2.解法アルゴリズム

$$\min z(x,q)=\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega-\sum_{r,s}\int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\,d\omega \qquad [6.10a]$$

Subject to

$$f_k^{rs}\geq 0 \quad \forall k,r,s \qquad [6.10b]$$

$$\boxed{q_{rs}\leq \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \qquad [6.10c]}$$

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs} \quad \forall r,s \qquad [6.10d]$$

計算の都合上，q_{rs}が大きくなりすぎないよう上限を設ける

ここで，x_a，$\mathrm{q_{rs}}$はそれぞれ

$$x_a=x_a(f)=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a$$ ←のようにf_k^{rs}の式で書ける

$$q_{rs}=q_{rs}(f^{rs})=\sum_k f_k^{rs} \quad \forall r,s$$

⇒目的関数$z(x,q)$は$z(f_k^{rs})$のようにfの関数で表せる

2.解法アルゴリズム

結局，解くべき式は

$$\min z(f) = \sum_a \int_0^{x_a(f)} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{r,s} \int_0^{q_{rs}(f^{rs})} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega \quad [6.11a]$$

Subject to

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s \qquad [6.11b]$$

$$\sum_k f_k^{rs} \leq \bar{q}_{rs} \quad \forall r, s \quad [6.11c]$$

これを凸結合法による繰り返し計算によって解く

2.解法アルゴリズム

凸結合法による繰り返し計算

Step 0:初期値$\{x_a^n\}$, $\{q_{rs}^n\}$の設定

Step 1:以下の式を計算して$t_a^n = t_a(x_a^n)\ \forall a$を更新する

$$D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)\ \forall r,s \qquad [6.15]$$

Step 2:降下方向を探索する

1.以下のルールに基づき, 最も旅行時間の短いパスmを計算で求める

$$\begin{aligned} &If\ c_m^{rs^n} < D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n), set\ g_m^{rs^n} = \bar{q}_{rs} \text{ and } g_k^{rs^n} = 0\ \ \forall k \neq m \\ &If\ c_m^{rs^n} > D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n), set\ g_k^{rs^n} = 0\ \ \forall k \end{aligned} \qquad [6.16]$$

2.以下の式に基づき, 補助変数$\{y_a^n\}$, $\{v_{rs}^n\}$を求める

$$\begin{aligned} y_a^n &= \sum_{rs}\sum_k g_k^{rs^n}\delta_{a,k}^{rs}\ \ \forall a \\ v_{rs}^n &= \sum_k g_k^{rs^n} \end{aligned} \qquad [6.17]$$

2.解法アルゴリズム

Step 3:以下の式を解き，移動距離α_nを求める

$$\min z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{r,s} \int_0^{q_{rs}^n + \alpha(v_{rs}^n - q_{rs}^n)} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega$$

Subject to [6.18a]

$$0 \le \alpha \le 1 \quad [6.18b]$$

Step 4:以下の式よりフロー$\{x_a^{n+1}\}$，$\{q_{rs}^{n+1}\}$を求める

$$x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha_n (y_a^n - x_a^n) \quad [6.19a]$$

$$q_{rs}^{n+1} = q_{rs}^n + \alpha_n (v_{rs}^n - q_{rs}^n) \quad [6.19b]$$

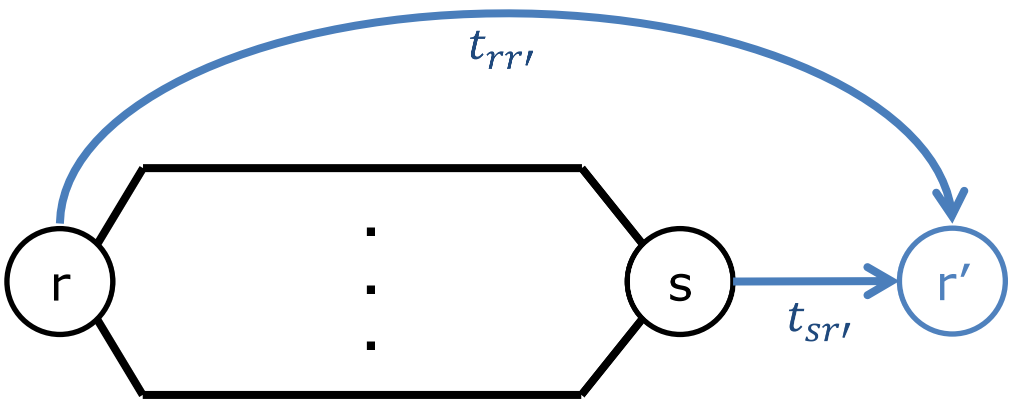
Step 5:以下の式で収束値を判定し，収束しなければStep1へ

$$\sum_{rs} \frac{|D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) - u_{rs}^n|}{u_{rs}^n} + \sum_{rs} \frac{|u_{rs}^n - u_{rs}^{n-1}|}{u_{rs}^n} \le \kappa \qquad [6.20]$$

3.ネットワーク表現による解法

仮想のノードとリンクを設定することで，需要固定型の場合と同様の解法が適用できる

3-1.The Zero-Cost Overflow Formulation



$$t_{sr'} = -D_{rs}^{-1}(\cdot)\ \ \forall r, s \qquad [6.21a]$$

$$t_{rr'} = 0\ \ \forall r, s \qquad [6.21b]$$

全てのODペアrsに対して上式[6.21]を満たすような

・ダミーの到着地 r'

・generating link sr'

・zero-cost overflow link rr'　を設定する

3.ネットワーク表現による解法

3-1.The Zero-Cost Overflow Formulation

最小化問題は以下のようになる

$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\overset{q_{rs}}{\boxed{x_{sr'}}}} \underbrace{t_{sr'}(\omega)}_{-D^{-1}(\omega)} d\omega + \sum_{rs} \int_0^{x_{rr'}} \underbrace{t_{rr'}(\omega)}_{0} d\omega \qquad [6.22a]$$

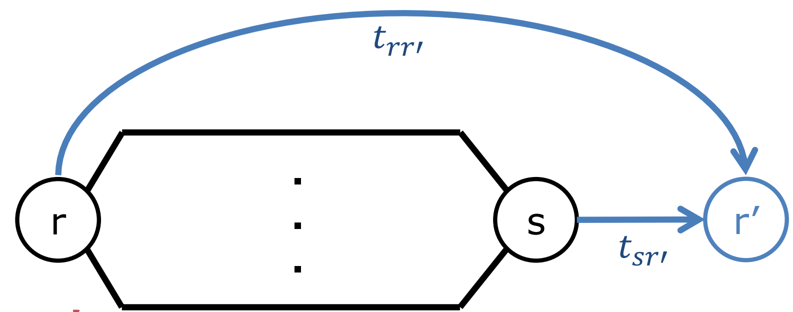
Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} + x_{rr'} = \bar{q}_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.22b]$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s \qquad [6.22c]$$

$$x_{rr'} \geq 0 \quad \forall r, s \qquad [6.22d]$$

$\bar{q}_{rs}$: rr'間の総トリップ数(定数)



$t_{sr'} = -D_{rs}^{-1}(\cdot)$

$t_{rr'} = 0$

ダミーリンクrr'に対し$\bar{q}_{rs}$を設定することで，需要固定の場合と同様に解くことができるようになる

3.ネットワーク表現による解法

3-2.Excess-Demand Formulation

最小化問題

$$\min z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega - \sum_{r,s} \boxed{\int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)\, d\omega}$$

ここで,

$$\boxed{\int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega} = \underbrace{\int_0^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega}_{\text{定数}} \boxed{- \int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega} \qquad [6.23a]$$

式[6.23a]の第2項は以下のように変形できる

$$\boxed{-\int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega} = -\int_{\bar{q}_{rs}-q_{rs}}^{0} D_{rs}^{-1}(\bar{q}_{rs} - v)(-dv) \qquad [6.23b]$$

$$= -\int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v) dv$$

$e_{rs} = \bar{q}_{rs} - q_{rs}$(超過需要)　　　$v = \bar{q}_{rs} - \omega$

$W_{rs}(e_{rs}) = D_{rs}^{-1}(q_{rs})$,

3.ネットワーク表現による解法

3-2.Excess-Demand Formulation

以上より，最小化問題は以下のようになる

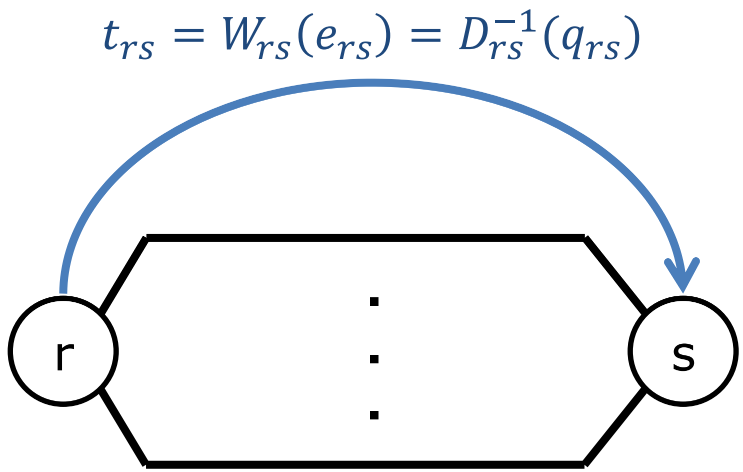
$$\min z(x,e) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)\, dv \quad [6.24a]$$

Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} + e_{rs} = \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \quad [6.24b]$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad [6.24c]$$

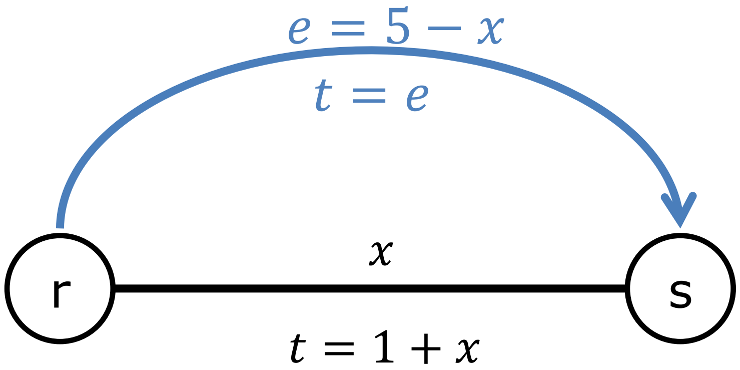
$$e_{rs} \geq 0 \quad \forall r,s \quad [6.24d]$$



結局，上の図のようなネットワークの最小化問題を解くことと同じになる

3.ネットワーク表現による解法

3-2.Excess-Demand Formulation(具体例)



■リンクパフォーマンス関数

$$t = 1 + x \ (= t(x))$$

■需要関数

$$x = 5 - t (= D(t))$$

$$\leftrightarrow t = 5 - x (= D^{-1}(x))$$

$\bar{q} = 5$ より $e = 5 - x$なので,

$W(e) = D^{-1}(x) = e$

$$\min z(x, e) = \int_0^x (1 + \omega) d\omega + \int_0^e v\, dv$$

Subject to

$$x + e = 5$$

$$x, e \geq 0$$

これを解くと,

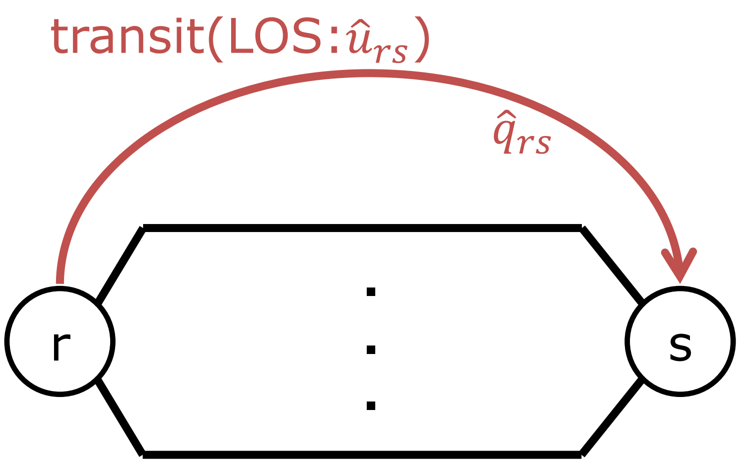
$x = 2 (e = 3)$

が得られる

4.交通手段選択問題

ピーク時の交通量:トリップの取りやめ/時間の調整は起こりにくい
⇒他の交通手段への転換を考慮する必要がある

仮定
・各公共交通のLOSは混雑や愛顧によらない
・各公共交通はそれぞれ専用のルートを持っている
・各公共交通は十分な容量を持ち，混雑などの影響はない
・自動車は1台につき1人しか乗っていない



公共交通を加えた各ODペアのネットワークは左のようなものを仮定
⇒超過需要のネットワークと似ている

ただし，今回はOD間総トリップ数$\bar{q}_{rs}$は任意の上限値をとらず，実際の総トリップを用いる

4.交通手段選択問題

利用者均衡状態では

1.交通手段がどちらも使われている場合，旅行時間は等しい
2.どちらか一方しか使われない場合，使われていない方の旅行時間は，使われている方の旅行時間より長くなる

最小化問題はExcess-Demand Formulationの時と同様，以下のようになる

$$\min z(x,\hat{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \hat{q}_{rs}\hat{u}_{rs} \qquad [6.25a]$$

Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs} \quad \forall r,s \qquad [6.25b]$$

$$f_k^{rs}, \hat{q}_{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \qquad [6.25c]$$

$\hat{q}_{rs}$：公共交通の利用者数
$\hat{u}_{rs}$：公共交通のLOS(旅行時間)

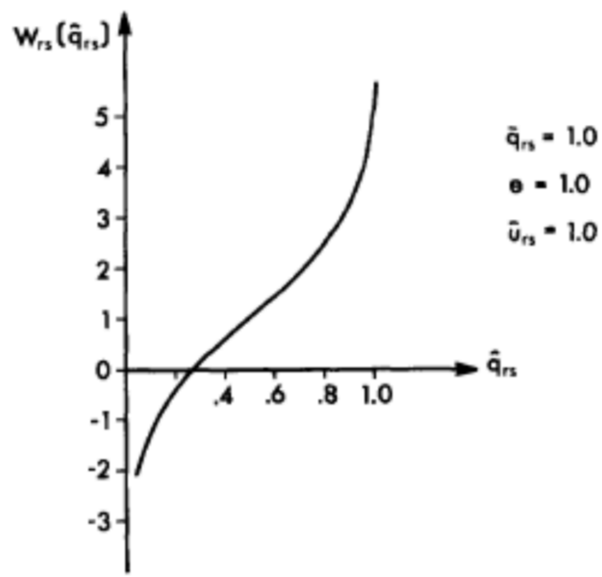
4.交通手段選択問題

実際には，均衡状態は現実に観測される現象を説明できていない
例)自動車より時間がかかっても公共交通を使うなど

・「必ず旅行時間が短くなるような手段を選ぶ」という仮定が間違い
・その他の計測・定量化できない要因も考えられる

実際には，以下のロジットモデルのような交通手段選択モデルが用いられている

$$q_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{1}{1 + e^{\theta(u_{rs} - \hat{u}_{rs})}} \quad [6.26]$$



4.交通手段選択問題

ロジットモデルを用いた定式化

$$q_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{1}{1 + e^{\theta(u_{rs} - \hat{u}_{rs})}} = D_{rs}(u_{rs}) \qquad [6.26]$$

上式は自動車の需要関数とみなすことができる.
逆関数$D_{rs}^{-1}(q_{rs})$は以下のようになる

$$u_{rs}(q_{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{\bar{q}_{rs}}{q_{rs}} - 1\right) + \hat{u}_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.27a]$$

このとき，超過需要関数$W_{rs}(\cdot)$は

$$W_{rs}(\hat{q}_{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}}\right) + \hat{u}_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.27b]$$

以上を用いて， Excess-Demand Formulationの計算法を適用する

4.交通手段選択問題

ロジットモデルを用いた定式化

最小化問題は以下のようになる

$$\min z(x, \hat{q}_{rs}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\, d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} W_{rs}(\omega)\, d\omega \quad [6.28a]$$

Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.28b]$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s \qquad [6.28c]$$

$$0 < \hat{q}_{rs} < \bar{q}_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.28d]$$

以上を凸結合法による繰り返し計算で解くことができる

均衡状態では以下が成り立つ

$$\frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{\bar{q}_{rs}}{q_{rs}} - 1\right) + \hat{u}_{rs} = u_{rs} \quad \forall r, s \qquad [6.29a]$$

$$\frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs}} = \frac{1}{1 + e^{\theta(\hat{u}_{rs} - u_{rs})}} \quad \forall r, s \qquad [6.29b]$$

5.まとめ

- 需要変動型の利用者均衡配分問題を定式化した．需要固定型では既与であったトリップ率q_{rs}を需要関数$D_{rs}(\cdot)$に置き換えることで解くことが可能になった．
- 需要変動型の場合の定式化は需要固定型のものと類似している．しかし，大きな違いとしてトリップ率q_{rs}が変数として組み込まれていることがあげられる．
- 凸結合法により需要変動型の問題も解くことが可能であるが，ネットワークの表現方法を少し変えるだけで，需要固定型の問題と同様に解くことができ，より簡単に解を求められる．
- ネットワーク表現法の1つであるexcess-demand network reprensentationはmulti modalな問題にも適用できる．また，ロジットモデルを適用したmulti modalな選択問題の定式化を行った．