確率論の基礎

2013/05/25
確率過程集中ゼミ
担当：B4 芝原 貴史

1. 事象と確率
2. 確率分布関数・確率密度関数
3. 平均

1. 事象と確率
2. 確率分布関数・確率密度関数
3. 平均

1. 確率と事象

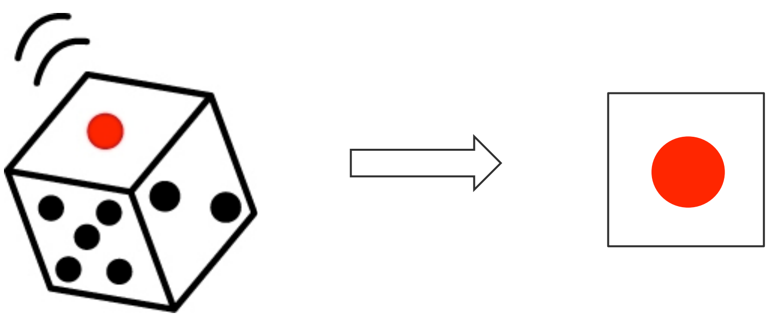
1-1.　事象

例）さいころを振る場合。

さいころを振る・・・　**試行**(trial)

さいころを振った結果・・・　**標本点**(sample point)

結果として得られる事柄・・・**事象**(event)



1 ＝標本点

1 の目が出る＝事象

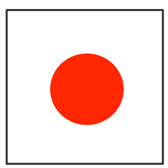
さいころを振る＝試行

1-1.　事象

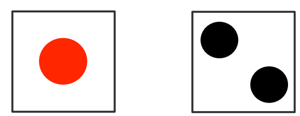
例）さいころを振る場合。

それ以上分解できない事象・・・　**<u>根元事象</u>**(elementary event)

根元事象を組み合わせた事象・・・**<u>複合事象</u>**(compound event)



１の目が出る
＝根元事象　：$\{s_1\}$



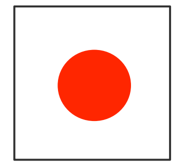
１か２の目が出る
＝複合事象　：$\{s_1, s_2\}$

全事象を標本点で表したもの・・・**<u>標本空間</u>**(sample space)

$$= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

1-1.　事象

例）さいころを振る場合。



１の目が出る
$= A_1 : \{s_1\}$

以降、$A_1 = \{s_1\}$ と表すことにする。

奇数の目が出る事象＝　$A_1 \cup A_3 \cup A_5$　$= \{s_1, s_3, s_5\}$

1か2の目が出る事象＝　$A_1 \cap A_2$　$= \varnothing$

…<u>**空事象**</u>(null event)

・・・A_1 と A_2 は<u>**互いに背反**(exclusive)**な事象**</u>と呼ぶ。

1-1.　事象

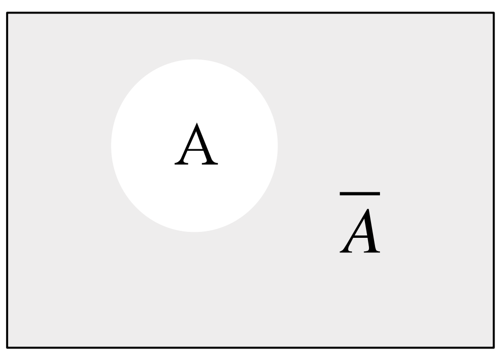
事象間の関係まとめ。

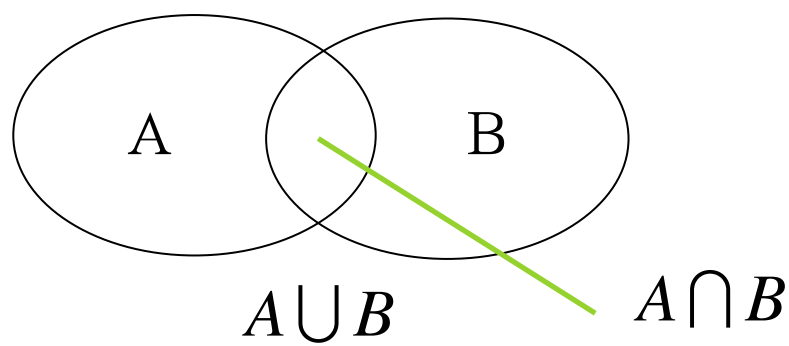
a) **空事象**：互いに背反な関係　$\varnothing$

b) **補事象**(complement event)　$\overline{A}$

c) **和事象**(sum event)　$A \bigcup B$

d) **結合事象(積事象)**(joint event)　$A \bigcap B$



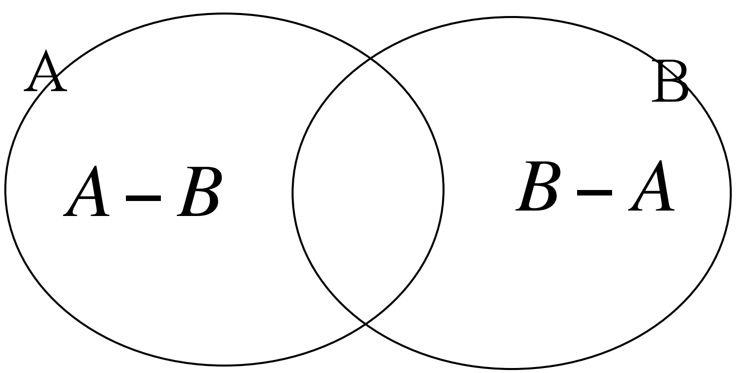


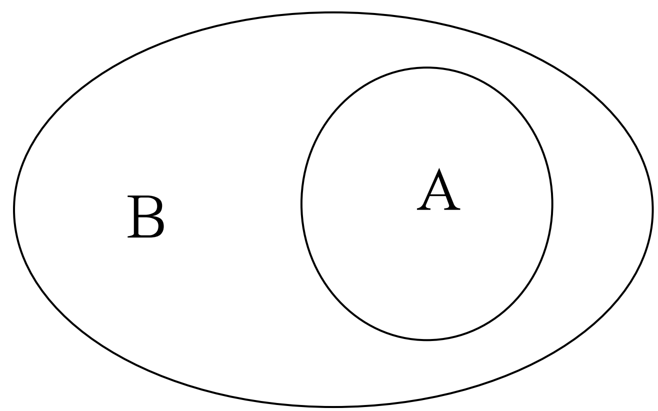
1-1.　事象

事象間の関係まとめ。

e) **<u>差事象</u>**　$\overline{A} \cap B = B - A$

f)　$A \subset B$





$A \subset B$

1-2.　確率の公理と性質

標本空間Ｓにおける事象Ａの確率をＰ（Ａ）とするとき、
以下の３つの公理が成り立つ。

公理１：　$0 \leq P(A) \leq 1$

公理２：　$P(S) = 1$

公理３：事象Ａ，Ｂ，Ｃが互いには違反な事象であれば、

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

・・・<u>有限加法性の公理</u>

1-2. 確率の公理と性質

先の公理３つを使って導かれる確率の性質を２つ挙げる。

性質１：

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

性質２：

$$P(\varnothing) = 0$$

1-3. 独立性

事象ＡとＢの結合確率がそれぞれの事象の確率の積で表される。

・・・事象ＡとＢは**統計的に独立**(statistically independent)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1-4. 条件付確率

条件付確率(conditional probability)
・・・事象Ａが起こったという条件の元での事象Ｂの確率

$$P(B|\mathrm{A})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象Ａと事象Ｂが独立であれば、 $P(B|\mathrm{A})=\mathrm{P(B)}$

確率の乗法定理 $P(A\cap B)=P(A)P(B|\mathrm{A})$

事象ＡとＢの結合確率は、一方の確率と、その事象の起こった元での条件確率の積で表せる。

1-5. ベイズの定理(Bayes` theorem)

$$P(B_i|\mathrm{A})=\frac{P(B_i)P(A|\mathrm{B}_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|\mathrm{B}_j)}$$

与えられた事象の結果から原因を推定するときに用いられる定理。

$P(B_i|\mathrm{A})$ が求められない時、$P(B_i)$ と $P(A|\mathrm{B}_i)$ とを用いて求めることができる。

1-5. ベイズの定理(Bayes` theorem)

【証明】標本空間の定義から、

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = S_B \qquad P(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)$$

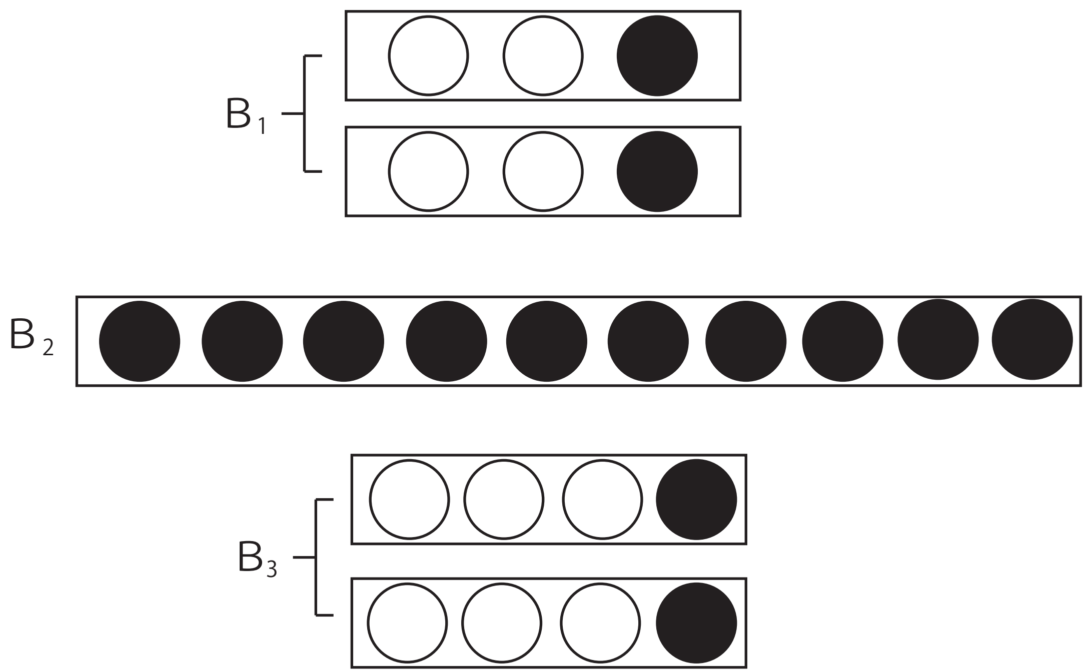
条件付確率の定義式と確率の乗法定理より、

$$P(B_i|\mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \qquad P(A \cap B_j) = P(B_j)P(A|\mathrm{B}_j)$$

$$\therefore P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|\mathrm{B}_j) \qquad \therefore P(B_i|\mathrm{A}) = \frac{P(B_i)P(A|\mathrm{B}_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|\mathrm{B}_j)}$$

1-5. ベイズの定理(Bayes` theorem)

例）下の５つの箱から１つを選び、そこから１つ球を取り出す時、それが白い球であるという事象Ａの確率Ｐ(Ａ)、および選ばれた箱がB_3の箱である確率$P(B_3|A)$を求める。



1-5. ベイズの定理(Bayes` theorem)

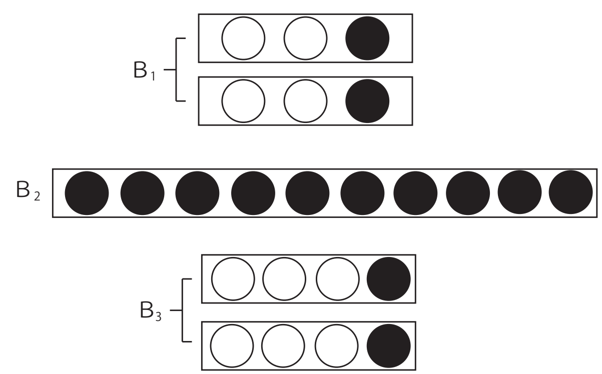
例）下の５つの箱から１つを選び、そこから１つ球を取り出す時、それが白い球であるという事象Ａの確率Ｐ（Ａ）、および選ばれた箱がB_3の箱である確率Ｐ（B_3｜Ａ）を求める。

解）各箱を選ぶ確率、および箱を選んだ元で白い球を選ぶ確率を考える。

$$P(B_1)=2/5, P(B_2)=1/5, P(B_3)=2/5$$

$$P(A|\mathrm{B}_1)=2/3, P(A|\mathrm{B}_2)=0, P(A|\mathrm{B}_3)=3/4,$$

$$P(A)=\sum_{j=1}^{3} P(B_j)P(A|\mathrm{B}_j)=\frac{17}{30}$$

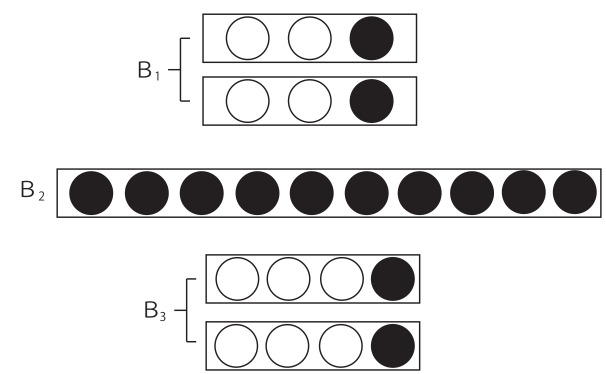


1-5. ベイズの定理(Bayes` theorem)

例）下の５つの箱から１つを選び、そこから１つ球を取り出す時、それが白い球であるという事象Ａの確率Ｐ（Ａ）、および選ばれた箱がB_3の箱である確率Ｐ（B_3｜Ａ）を求める。

解）白い球を選んだとき、その選んだ箱がB_3であった確率を求める。（推定する。）ベイズの定理を用いて、

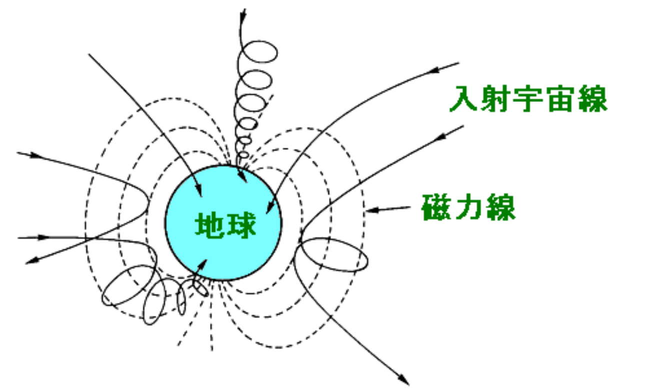
$$P(B_3|A)=\frac{P(A\cap B_3)}{P(A)}=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{9}{17}$$



1. 事象と確率
2. 確率分布関数・確率密度関数
3. 平均

2-1.　確率変数

例）ある一定時間内に地球上の
ある地点に降り注ぐ宇宙線粒子数



遠方から飛んでくる荷電粒子が地球磁場の中に入ると、そのエネルギーと初めの入射方向によって、様々な軌道を描き、あるものは地球表面に到達し、あるものは地球表面に触れずに遠ざかっていく。

図１　宇宙線に対する地磁気の影響の概念

［出典］西村純ら「宇宙放射線」共立出版から

さいころの目のような離散標本点
でなく、連続的な標本点を考える。

標本点sに対して、関数x(s)を定義

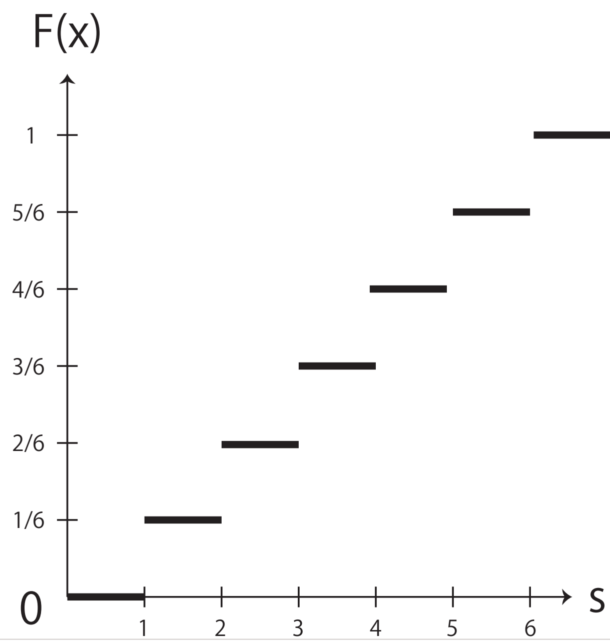
・・・<u>確率変数</u>(stochastic variable)

例）さいころ $\{x(s) \geqq 2\}$：さいころの目が２以上である事象

2-2.　確率分布関数

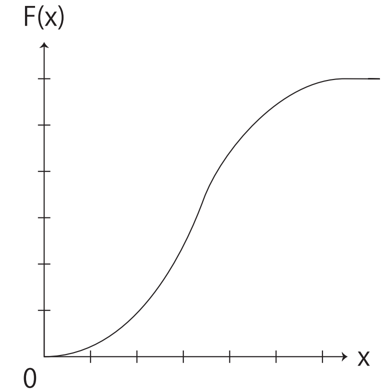
確率変数xに対して、s≦aである確率P(s≦a)を与える関数F(x)
・・・**<u>確率分布関数</u>**(probability distribution function)

例）さいころを投げたときに出る目の確率分布関数F(x)=P(s≦x)は、



$$F(x)=\sum_{i\le s}P(s=i),(i=1,2,\cdots,6)$$

2-2.　確率分布関数



a) a<x<bにxが存在する確率は、

$$P(a < x \le b) = P(x \le b) - P(x < a) = F(b) - F(a)$$

b) 確率分布関数F (x) は必ず非減少関数。

c)
$$F(\infty) = 1$$

d)
$$F(-\infty) = 0$$

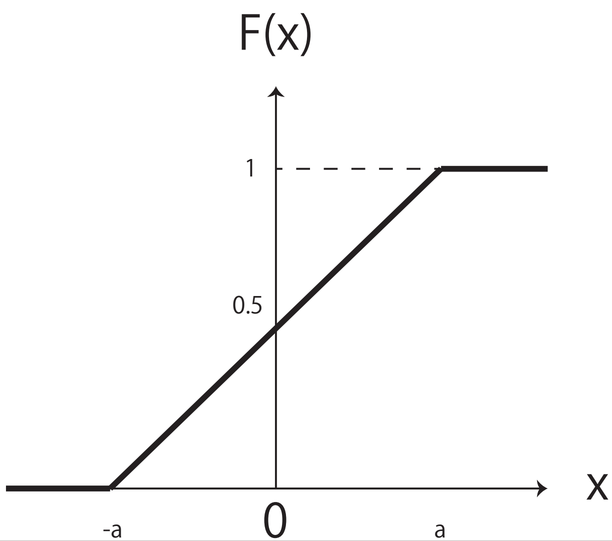
e)
$$0 \le F(x) \le 1$$

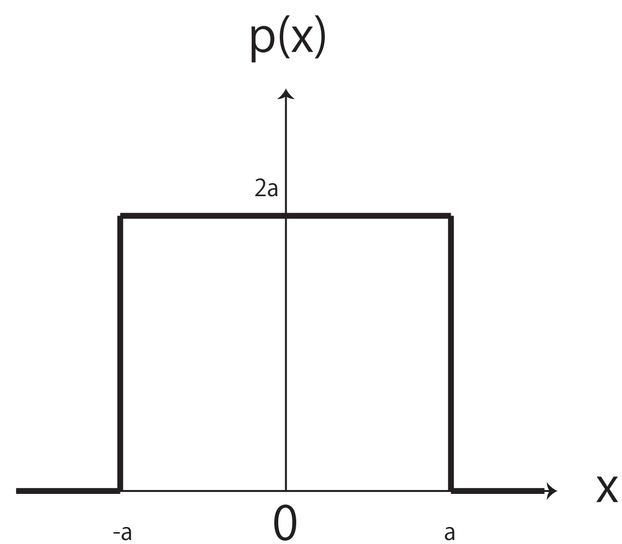
2-3. 確率密度関数

確率分布関数を微分した関数

・・・**確率密度関数**(probability-density-function)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx \qquad p(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$





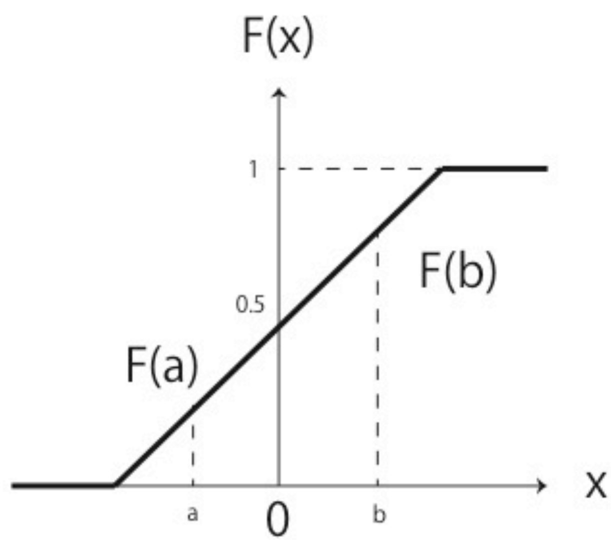
2-3.　確率密度関数

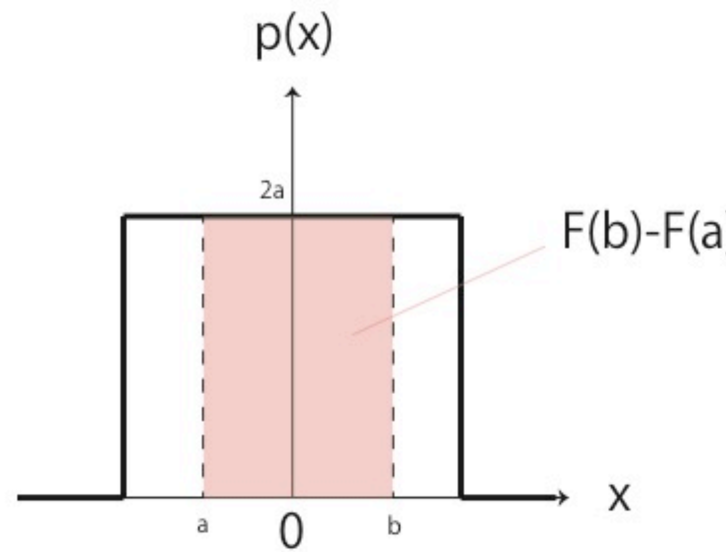
a) a<x<bにxが存在する確率は、

$$P(a < x \leq b)=\mathrm{F(b)-F(a)}=\int_a^b p(x)\,dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

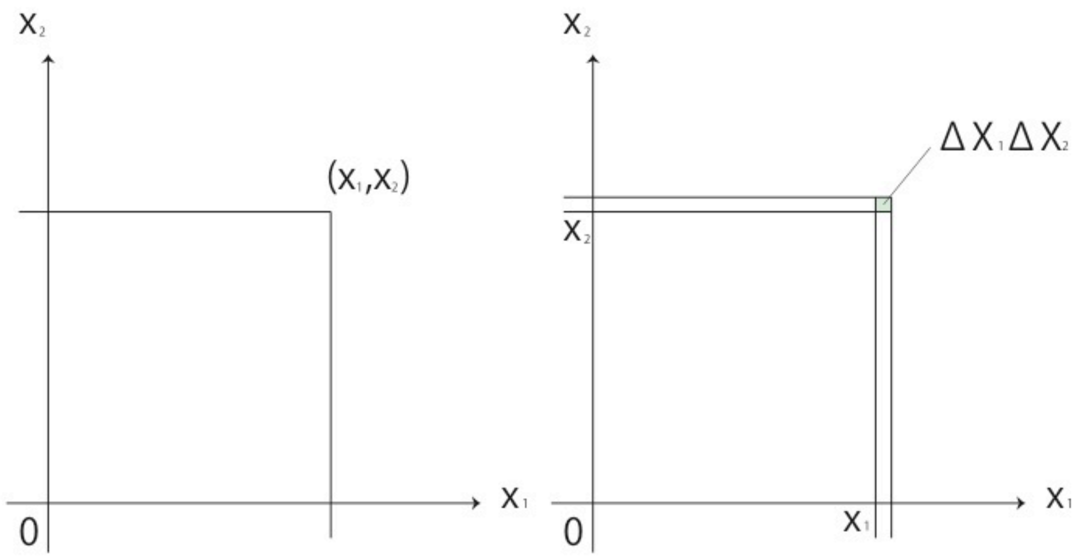




2-4.　結合確率分布関数・結合確率密度関数

確率分布関数、確率密度関数の概念を2次元以上に拡張した関数を、それぞれ**結合確率分布関数・結合確率密度関数**という。

$$P(x_1 \leq a, x_2 \leq b) = \mathrm{F(a,b)} = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} p(a,b)\, dx_1\, dx_2$$



2-5. 条件付確率分布関数・条件付確率密度関数

確率分布関数、確率密度関数の概念にxについての条件の元での確率を考えたもの：**条件付確率分布関数・条件付確率密度関数**。

$$\mathrm{F(b|a)}=\frac{\int_{-\infty}^{b} p(a,v)\,dv}{p(x_{1)}}\qquad p(\mathrm{b|a})=\frac{d}{dx_2}F(x_2|\mathrm{x}_1)=\frac{p(x_1,x_2)}{p(x_1)}$$

1. 事象と確率
2. 確率分布関数・確率密度関数
3. 平均

3. 平均

3-1. 平均

平均(average)
集合平均(ensemble average)
期待値(expected value)

$$E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx$$

例）さいころを振ったときの期待値。

$$E[x]=\sum_{i=1}^{6} xp(x)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

条件付平均・・・条件となる値によって平均値が変化する。予測や推定に広く用いられる。

$$E[x_2|x_1=a]=\int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_2|a)\,dx_2$$

3-2.　k次モーメント、k次中心モーメント

$$m_k = E\left[x^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\,dx, (k = 0,1,2,\cdots)$$

$$\mu_k = E\left[(x - E[x])^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k p(x)\,dx$$

k=2のときの２次中心モーメントを<u>**分散**</u>(variance)と呼び、展開すると、

$$\sigma^2 = \mu_2 = m_2 - (m_1)^2$$

3-3. 結合モーメント、結合中心モーメント

$$m_{k_1,k_2} = E\left[x_1^k x_2^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^k p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

k=1のときの結合モーメントを**相関**(correlation)と呼ぶ。

$$\mu_{k_1,k_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\left[x_1\right])^{k_1} (x_2 - E\left[x_2\right])^{k_2} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$K_1=k_2=1$のときの結合中心モーメントを**共分散**(covariance)と呼ぶ。

1. 事象と確率
2. 確率分布関数・確率密度関数
3. 平均

ご清聴ありがとうございました。