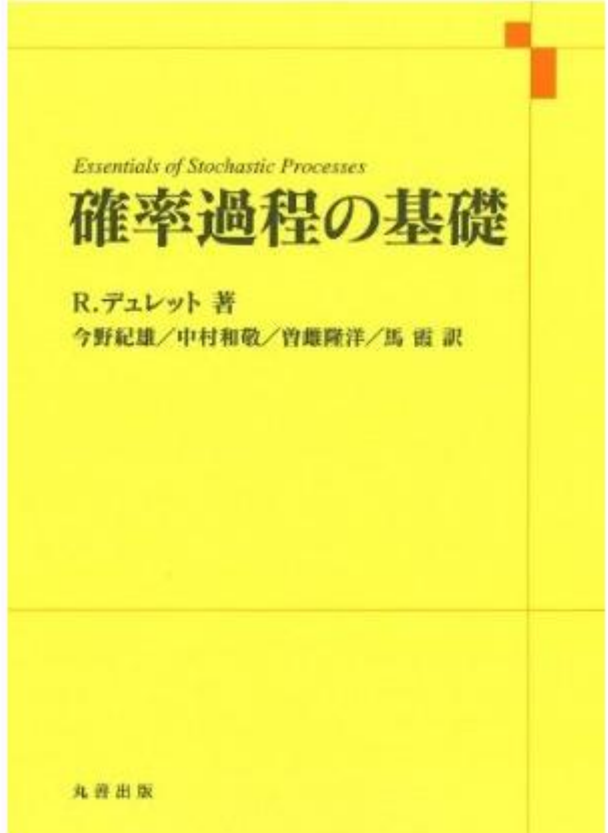


3章 ポアソン過程

～確率過程ゼミ　2013年5月25日(日)～

M1 今泉孝章

流れ

ポアソン過程の定義

バスの待ち時間などが従う指数分布からポアソン過程を導出し、その定義を説明する

ポアソン過程の特徴

ポアソン過程が持つ重要な特徴について説明を行う。発生した事象の量と関連づけを行い、ポアソン過程が分割、統合されるシンニングやスーパーポジションといわれる性質や条件付き確率について触れる

ポアソン過程の応用

ポアソン過程について先に説明を行った特徴を用い、現実の問題にどう適用されているかを説明する

指数分布

分布関数

$$P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1)$$

T :確率変数

$P(\cdot)$:・の生起する確率

λ :パラメータ

微分

確率密度関数

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (2)$$

T はパラメータλ の指数分布に従うといい

$T = \exp(\lambda)$ と表す

期待値(平均) $\dfrac{1}{\lambda}$　分散 $\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\rightarrow$ パラメータλ にのみ依存している

※任意の$T = t$で $P(T = t) = 0$ だが便宜的に $P(T = t) = f_T(t)$ とする

指数分布

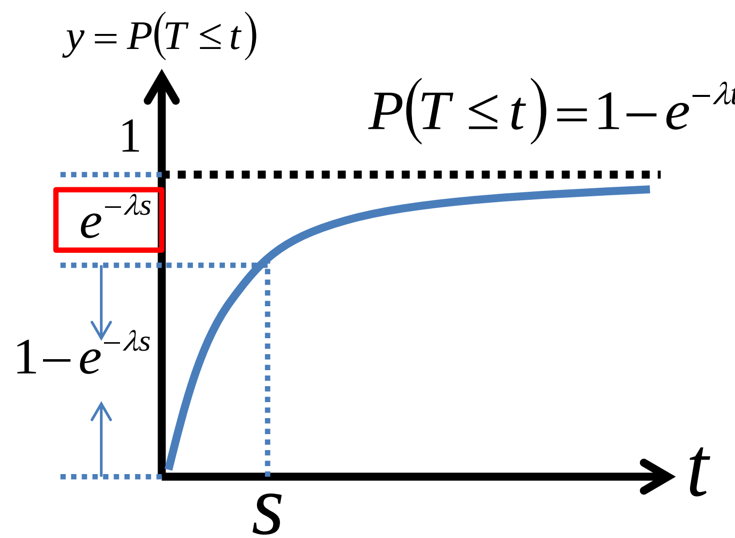
無記憶性

$$P(T>t+s\,|\,T>t)=P(T>s) \quad (3)$$

T を待ち時間とすると t 時間待ったもとでさらに S 時間待つ確率と初めから S 時間待つ確率に等しい

$$P(T>t+s\,|\,T>t)=\frac{1-\left(1-e^{-\lambda(t+s)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)}=\boxed{e^{-\lambda s}}=P(T>s)$$

※ $B\subset A \rightarrow P(B\,|\,A)=P(B)/P(A)$



待ち時間 T は指数分布に従う

指数分布

指数的競争

$S=\exp(\lambda)$、$T=\exp(\mu)$ が互いに独立であるとする

このとき一般に S と T の最小値が t より大きいとき S と T は t より大きい

$$
\begin{aligned}
P(\min(S,T)>t) &= P(S>t, T>t) \\
&= P(S>t)P(T>t) \\
&= e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (4)
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ $\min(S,T)$ はパラメータ $\lambda+\mu$ の指数分布に従う

拡張

$T_i=\exp(\lambda_i)$ $i=1,..,n$ が独立な確率変数だとすると

$$
\begin{aligned}
P(\min(T_1,..,T_n)>t) &= P(T_1>t,..,T_n>t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(T_i>t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \quad (5)
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ $\min(T_1,..,T_n)$ はパラメータ $\lambda_1+..+\lambda_n$ の指数分布に従う

指数分布

指数的競争

$S=\exp(\lambda)$ $T=\exp(\mu)$ について確率変数S がs であるとき確率変数T がs より小さい確率を考える

例)独立な分布に従って到着するバスがあるときに一方のバスが他方のバスよりも早く着く確率は?

$$P(S<T)=\int_0^\infty \underline{P(S=s)}\,\underline{P(T>s\mid S=s)}\,ds$$

$$=\int_0^\infty \underline{\lambda e^{-\lambda s}}\,\underline{e^{-\mu s}}\,ds$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\underbrace{\int_0^\infty(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}ds}_{1}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad (6)$$

パラメータ$\lambda+\mu$ の指数分布の確率密度関数

拡張

i 番目のバスが他のどのバスよりも早く着く確率は?

$$\boxed{P\left(T_i=\min\left(T_1,..,T_n\right)\right)=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+..+\lambda_n}} \quad (7)$$

指数分布

指数分布の和

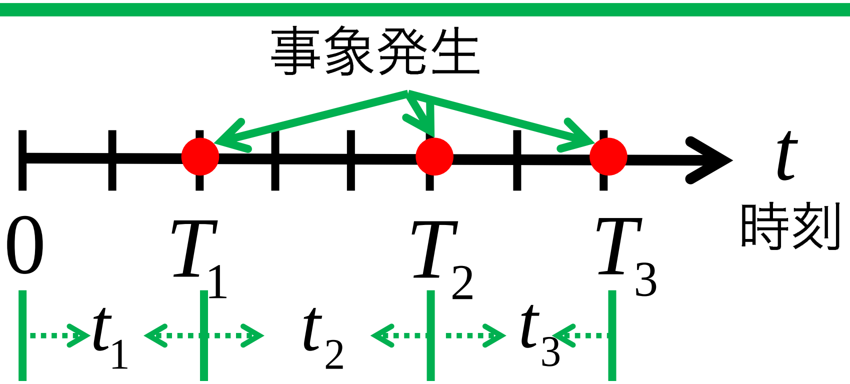
$t_1,\ldots,t_n$が独立同分布で各確率変数は指数分布$\exp(\lambda)$に従うとする

このとき指数分布の和$T_n = t_1 + \ldots + t_n$はガンマ分布 $gamma\ (n,\lambda)$に従う

確率密度関数

$$\boxed{P(T_n = t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}} \quad (8)$$

数学的帰納法で証明することができる



$T_n = t_1 + \ldots + t_n \quad T_0 = 0$

i　起こった事象の番号

T_i　事象i が起こった時の時刻

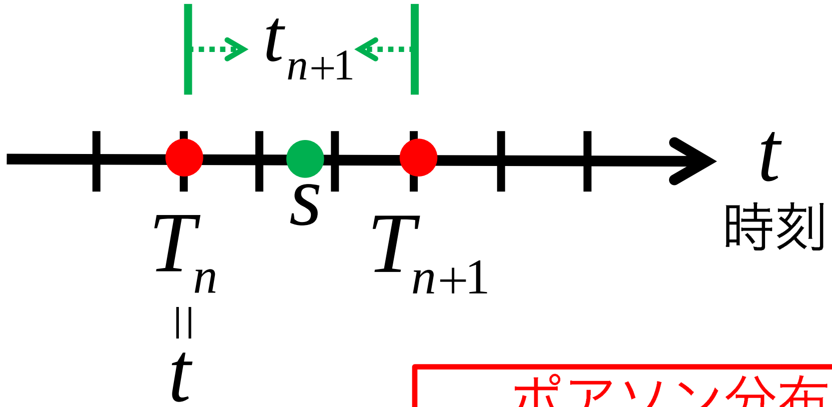
$t_1,\ldots,t_n$　独立同分布で$\exp(\lambda)$ に従い事象発生間隔を表す

$\boxed{N(t)\ \text{時刻}t\ \text{までに発生した事象の回数}}$

$N(s) = \max\{n : T_n \leq s\}$で定義される$N(s)$をパラメータ$\lambda$ のポアソン過程という

ポアソン過程

$N(s)$ の分布を求める



$N(s)=n \quad T_n \le s \le T_{n+1}$

$t_{n+1} > s-t$ が成り立つ

$$P(N(s)=n)=\int_0^s \underline{P(T_n=t)}P(T_{n+1}>s \mid T_n=t)dt$$

$$=\int_0^s \underbrace{P(T_n=t)}_{\text{ガンマ分布}}\underbrace{P(t_{n+1}>s-t)}_{\text{指数分布}}dt$$

$$=\int_0^s \underline{\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}\cdot \underline{e^{-\lambda(s-t)}}dt$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda s}\int_0^s t^{n-1}dt=e^{-\lambda s}dt=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!} \quad (9)$$

ポアソン分布

$$P(X=n)=e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}$$

$$(n=0,1,..)$$

確率変数 X は平均 μ のポアソン分布に従う

$$X=Poisson(\mu)$$

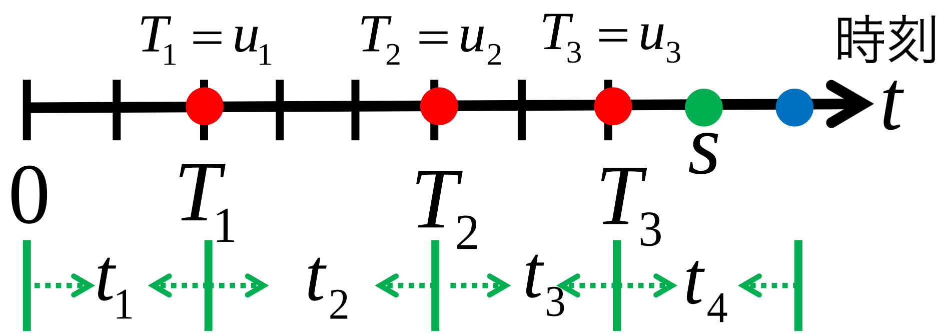
→ $N(s)$ は平均 λs のポアソン分布に従う

ポアソン過程

ポアソン過程の定義

$\{N(s), s \geq 0\}$ がパラメータλ のポアソン過程ならば以下の3条件を満たす

1. $N(0) = 0$
2. $N(t+s) - N(s) = Poisson(\lambda t)$
3. $N(t)$は独立増分である



2について
s からあらたに数え始めた場合でも
同様なポアソン過程である

時刻sまでに3回客が到着する
３人目の客が到着したときの待ち時間は
$t_4 > s - u_3$でなければいけない

$$P(t_4 > s - u_3 + t \mid t_4 > s - u_3) = P(t_5 > t) = e^{-\lambda t} = \exp(\lambda)$$

||

$t_4 > s - u_3$の条件で t だけ待つ確率

→ s 以降で初めて客が到着する分布が $\exp(\lambda)$ であり(9)より定義2は成立

ポアソン過程

ポアソン過程の定義

$\{N(s), s \geq 0\}$ がパラメータλ のポアソン過程ならば以下の3条件を満たす

1. $N(0)=0$
2 $N(t+s)-N(s)=Poisson(\lambda t)$
3. $N(t)$は独立増分である

3について
$N(t_n)-N(t_{n-1})$を増分というので$N(t_n)-N(t_{n-1}), N(t_{n-1})-N(t_{n-2}),.., N(t_2)-N(t_1)$
が独立であればよい

定義2より$N(t_n)-N(t_{n-1})$ が $N(r)(r \leq t_{n-1})$ と独立、以前の結果とは関係を持たないことが分かるので定義3は成立

ポアソン分布と二項分布

ポアソン分布は二項分布の近似

あるレストランにn人が12:00〜13:00に間に確率$\frac{\lambda}{n}$で食べに行くとする
このときk人が店に行く確率は?

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \longrightarrow \text{二項分布}$$

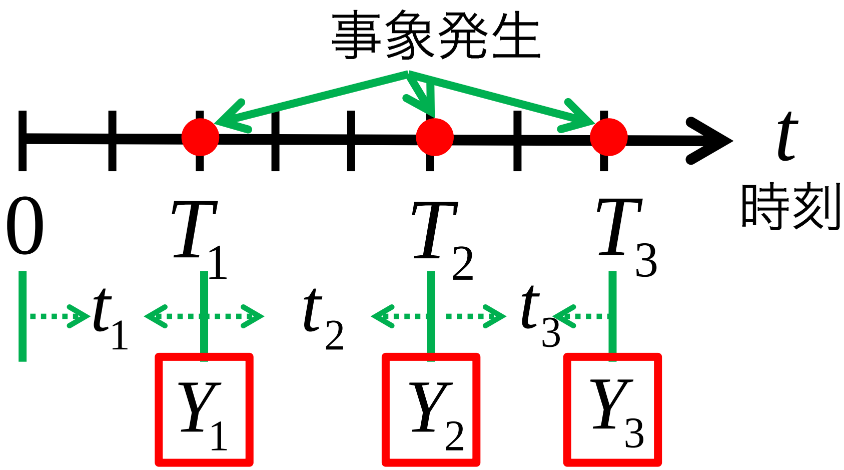
$$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}$$

$n\to\infty$ とすると $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\to e^{-\lambda}$ に注意すると

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\to\boxed{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} \longrightarrow \text{ポアソン分布}$$

複合ポアソン過程



ポアソン過程がレストランへ人が到着する事象だとし、ある到着が起きたときに何人来たかというのをY_iとし到着回数$N(t)$と関連付ける

このときY_iはiについて互いに独立であるとともに到着回数を示すポアソン過程$N(t)$と独立
→到着回数と到着人数や前にどれだけ到着したかは将来に影響しないということ

i　起こった事象の番号

T_i　事象iが起こった時の時刻

$t_1,\ldots,t_n$ 独立同分布で$\exp(\lambda)$に従い事象発生間隔を表す

$N(t)$　時刻tまでに発生した事象の回数

Y_i　i番目の事象が発生したときの量(人数など)で独立同分布な確率変数

$S(t)$　時刻tまでのY_iの総和

$$S(t)=Y_1+\cdots+Y_{N(t)}$$

$$N(t)=0\rightarrow S(t)=0$$

シンニングとスーパーポジション

複合ポアソン過程における到着量Y_iによってポアソン過程を分割することを考える→到着量 Y_i ごとのポアソン過程によりもとのポアソン過程が分割する

$N(t)$ 時刻t までに発生した事象の回数

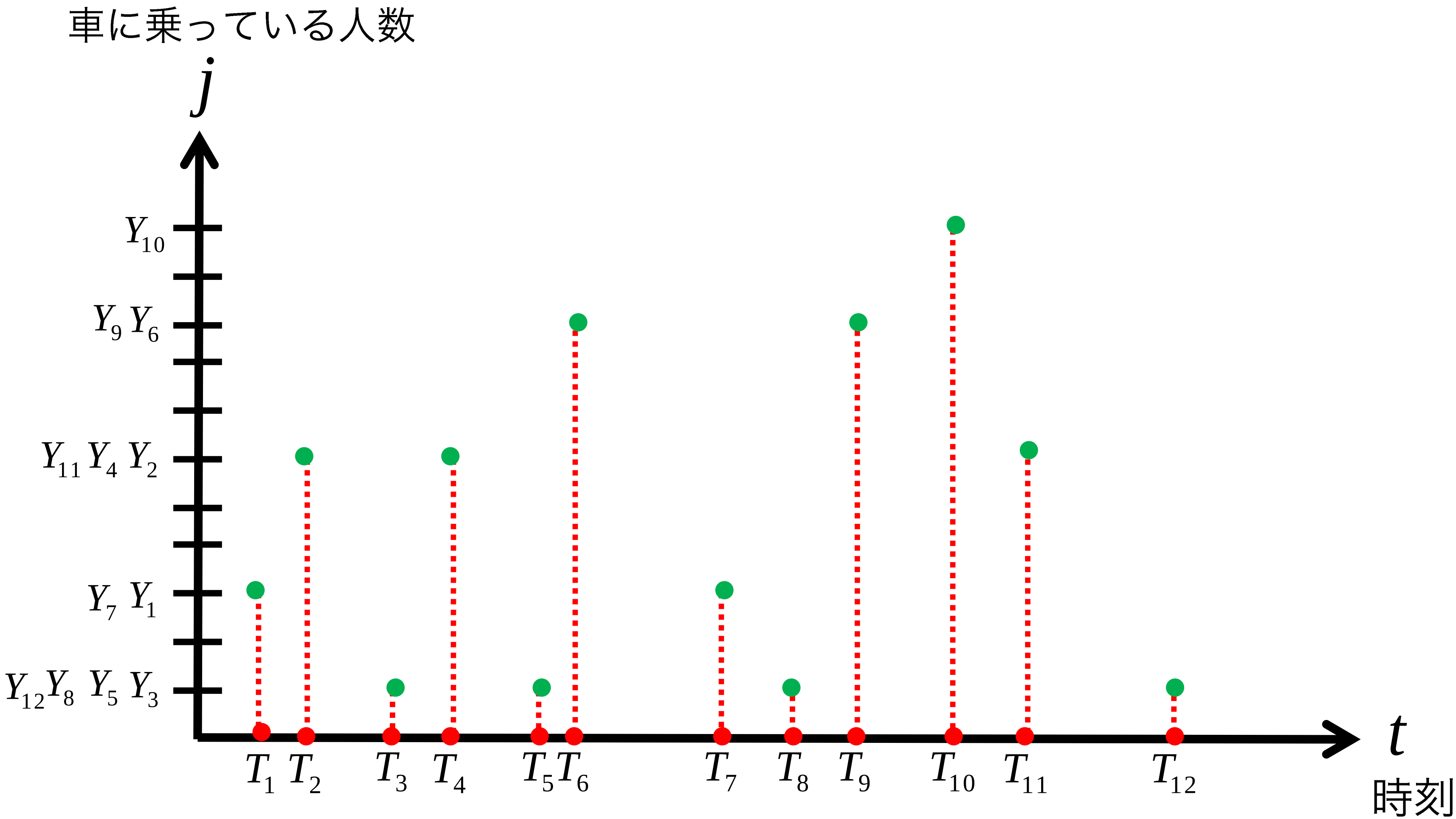
$N_j(t)$ 時刻t までにj乗せた車が到着する回数

Y_i i番目に到着した車に乗っている人数

このとき $N_j(t)$ はパラメータ$\lambda P(Y_i = j)$ の独立なポアソン過程である

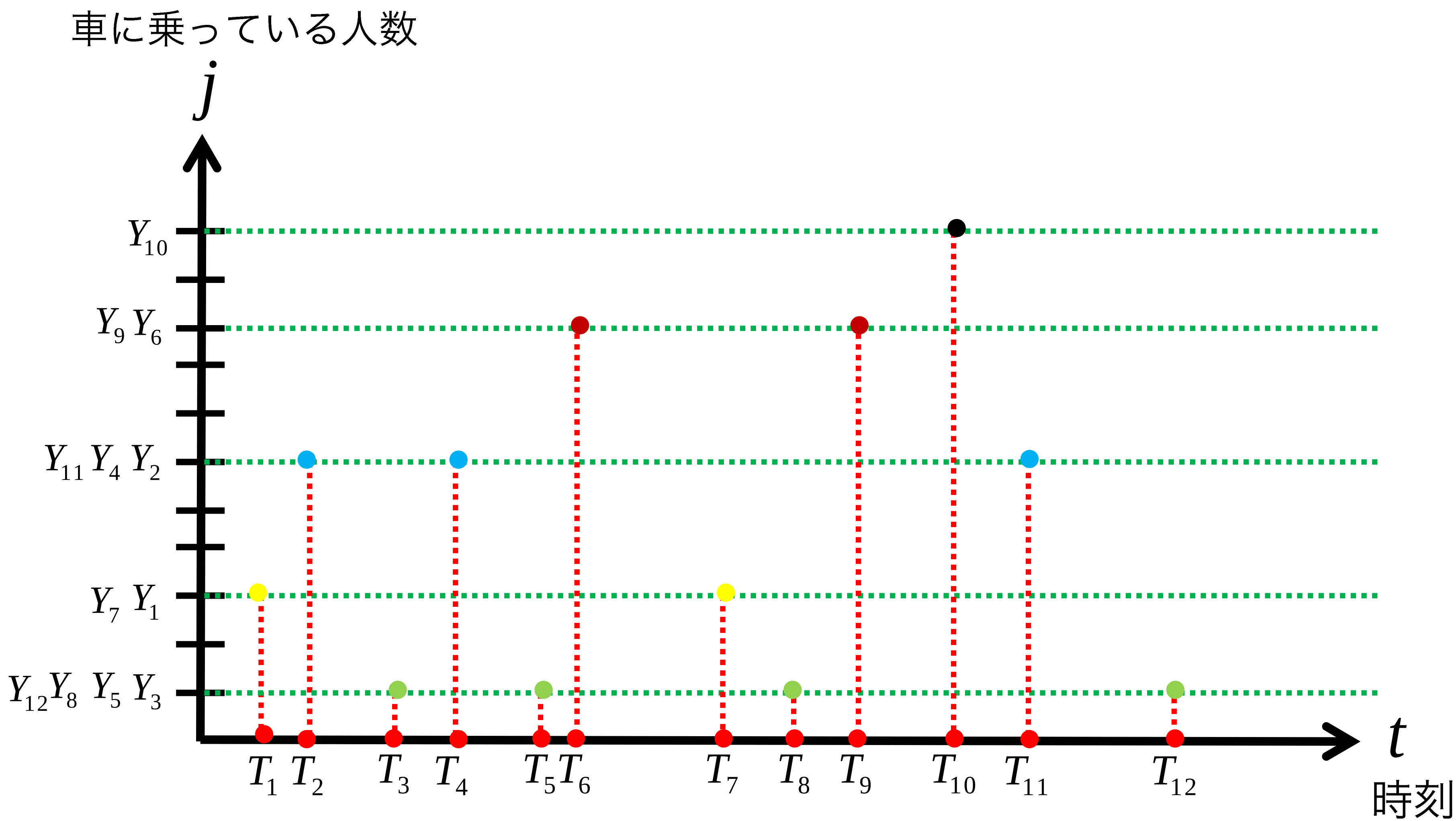
例えばレストランにやってくる人が最大11人だとし、 人でやってくる確率がP_n だとする。このとき $\sum_{n=1}^{n=11} P_n = 1$ である

シンニングとスーパーポジション



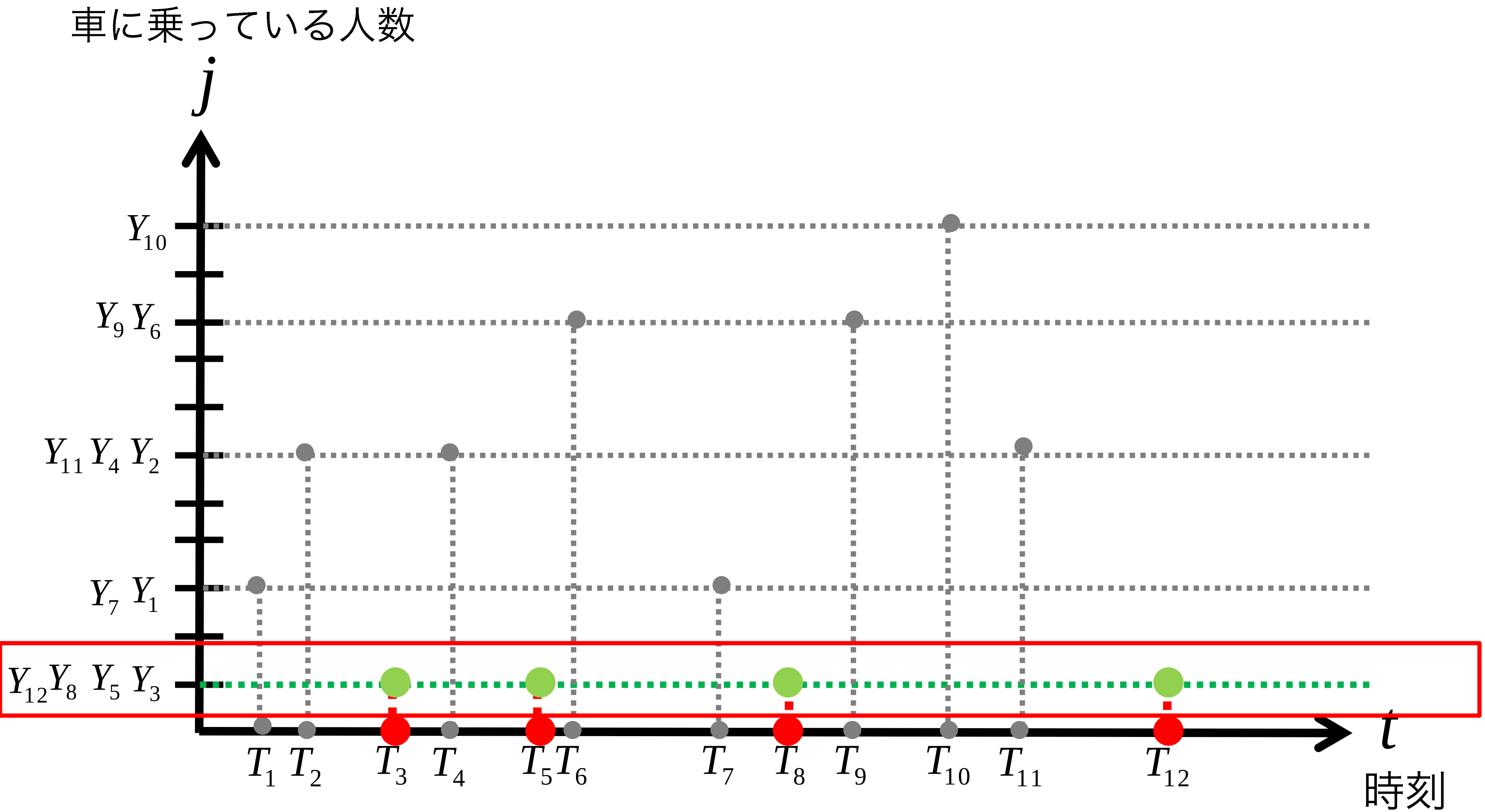
$N(t)$ はパラメータλ のポアソン過程である

シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータ λ のポアソン過程である

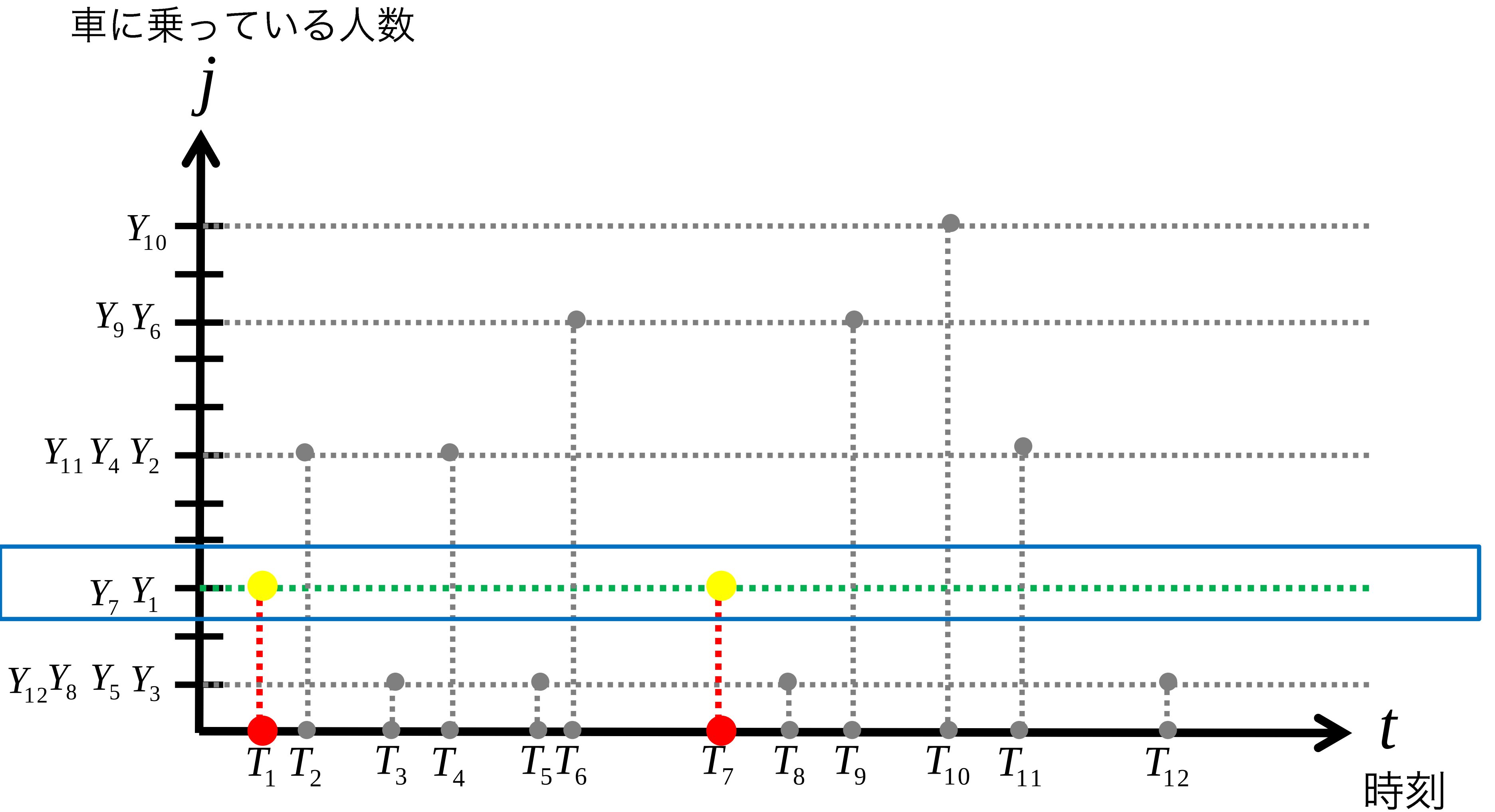
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータλ のポアソン過程である

$N_1(t)$ はパラメータλP_1のポアソン過程である

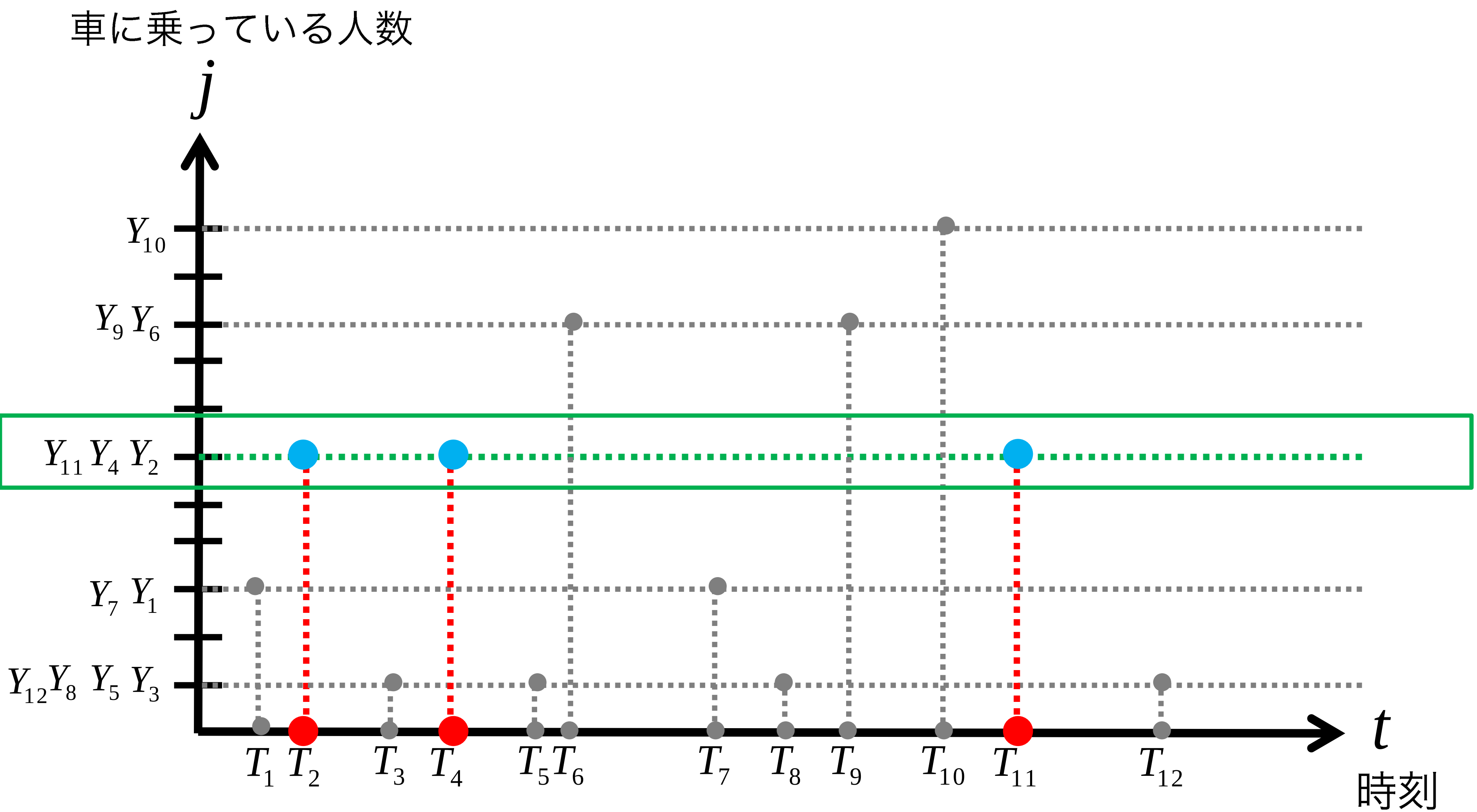
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータ λ のポアソン過程である

$N_3(t)$ はパラメータ λP_3 のポアソン過程である

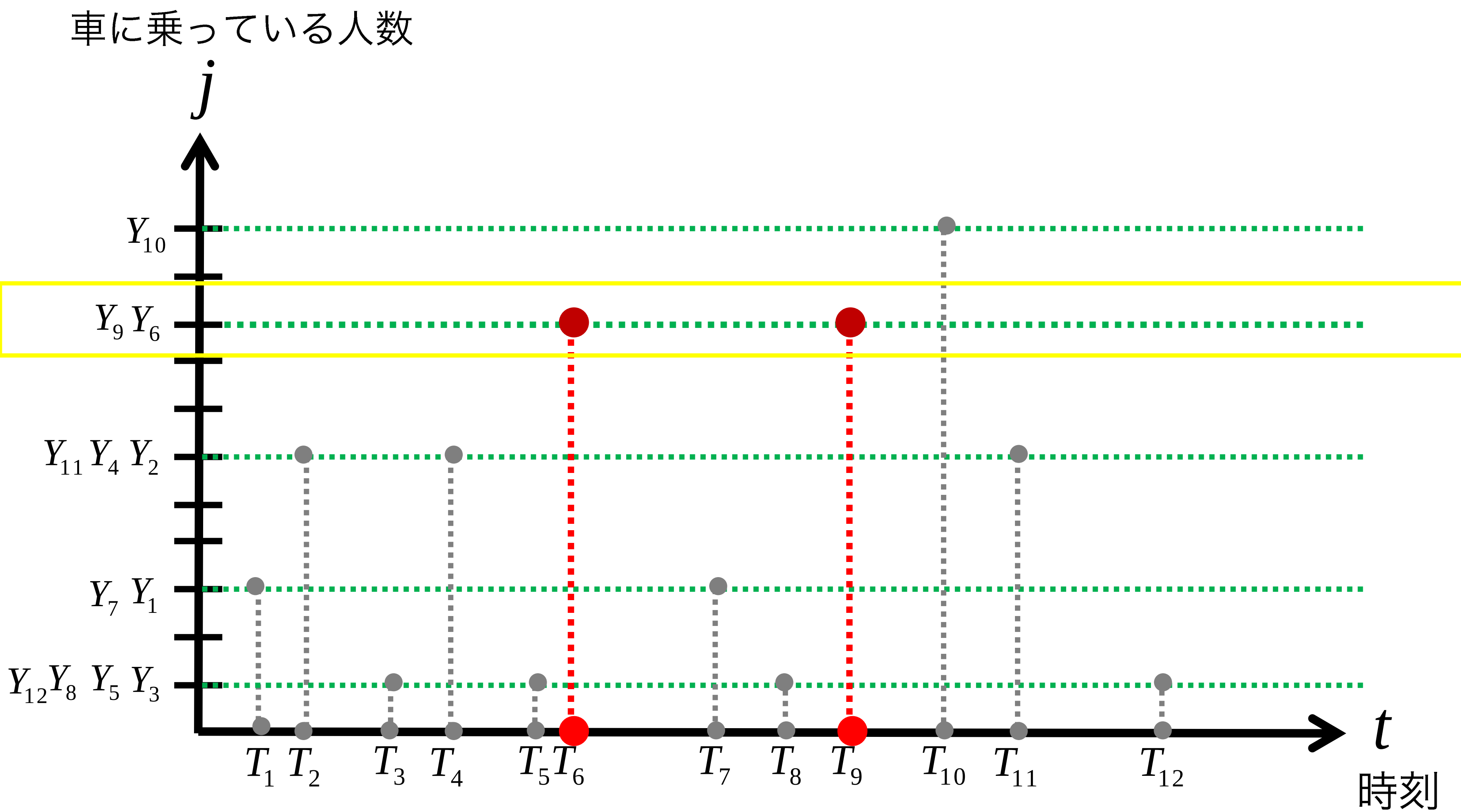
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータ λ のポアソン過程である

$N_6(t)$ はパラメータ λP_6 のポアソン過程である

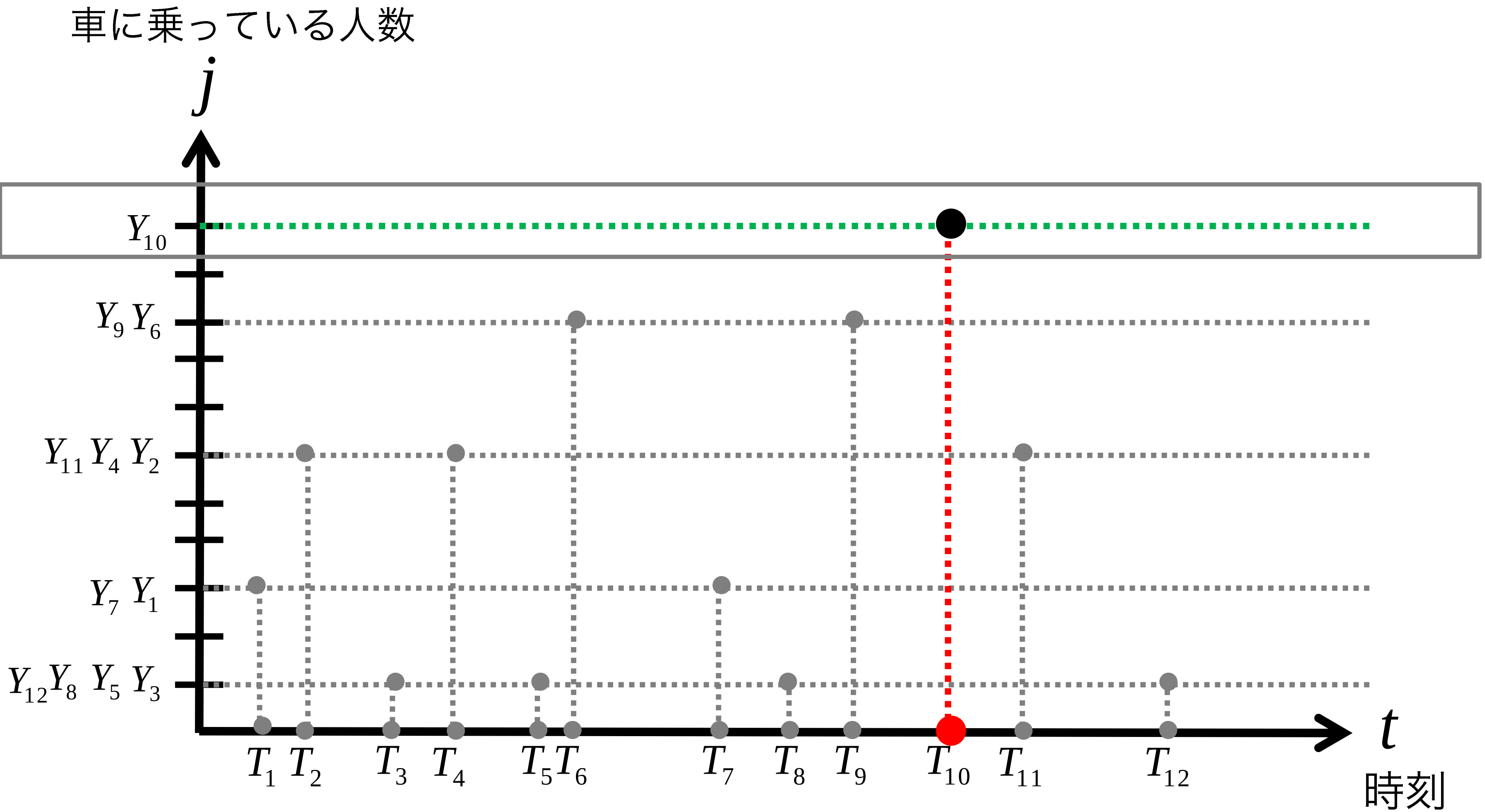
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータ λ のポアソン過程である

$N_9(t)$ はパラメータ λP_9 のポアソン過程である

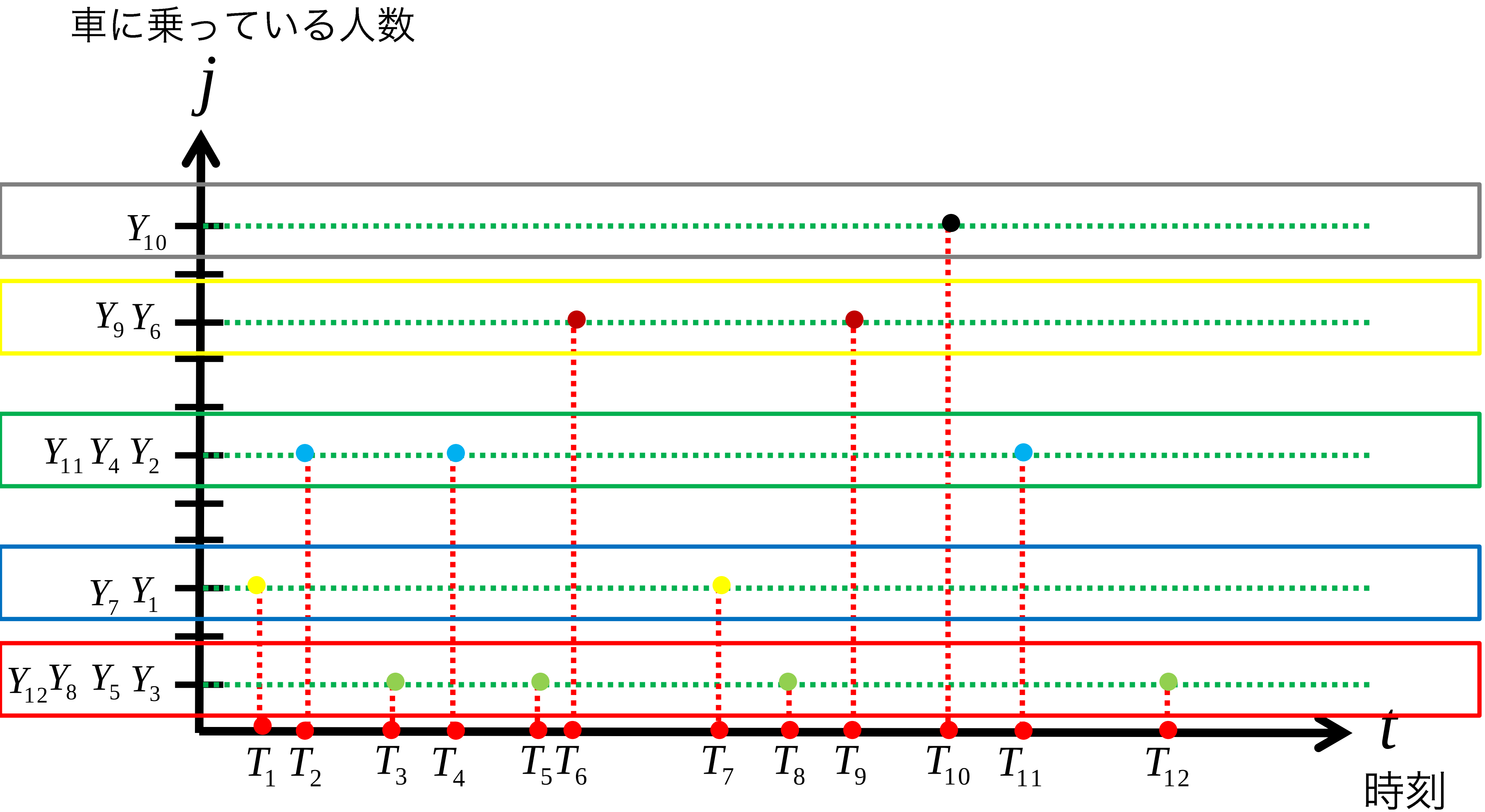
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はポアソン過程である

$N_{11}(t)$ はパラメータ λP_{11} のポアソン過程である

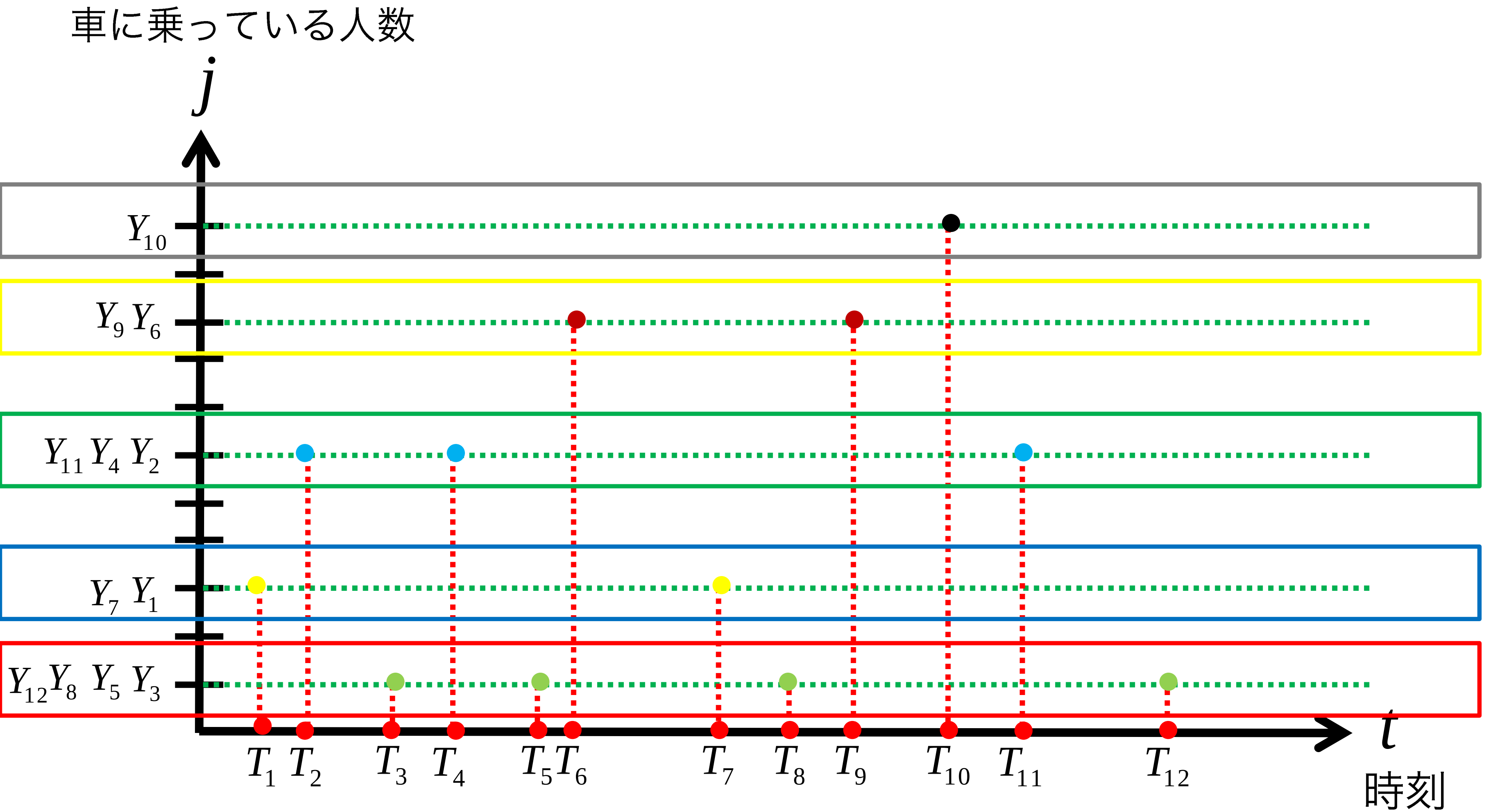
シンニングとスーパーポジション



$N(t)$ はパラメータλ のポアソン過程である

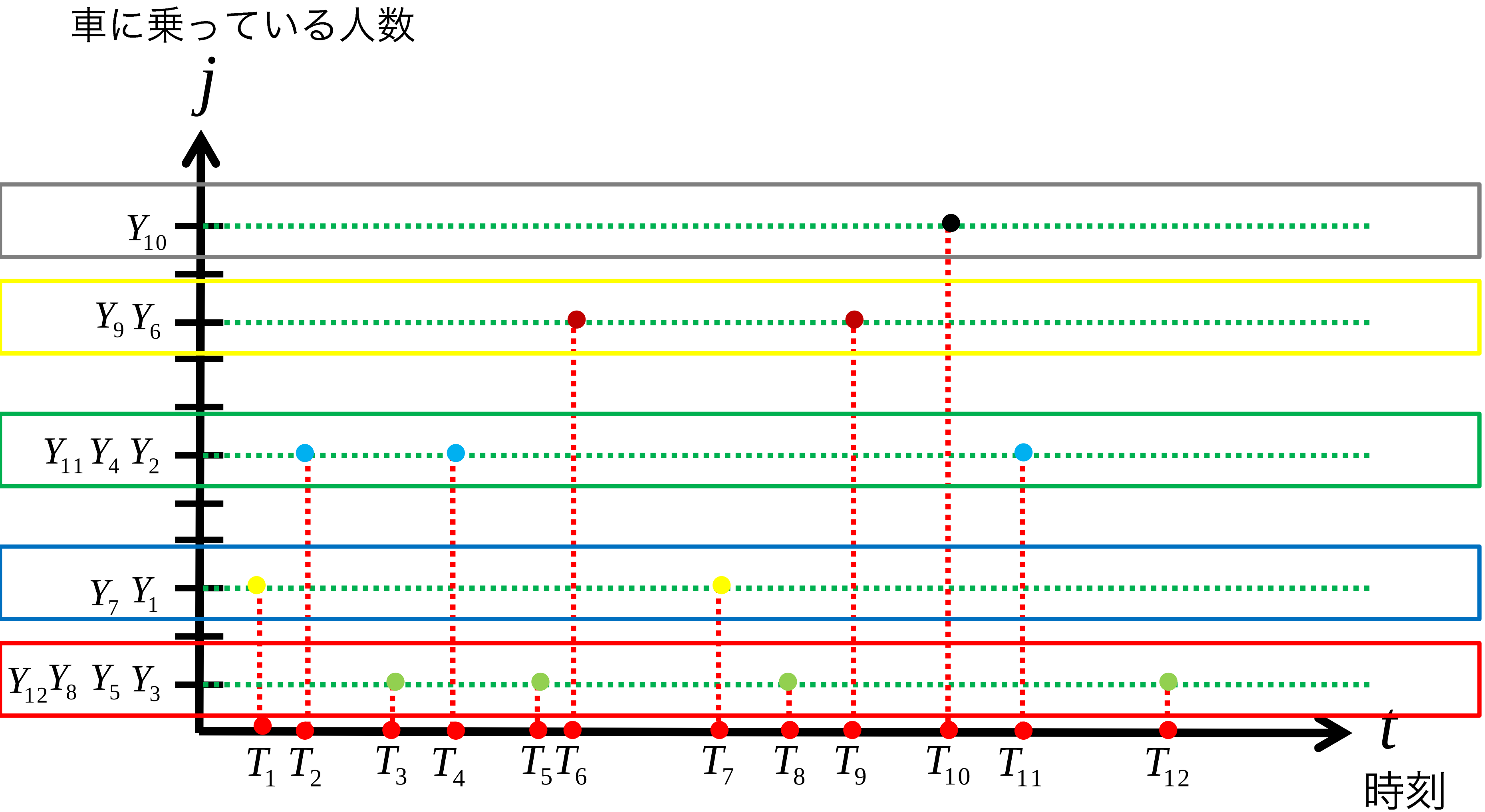
それぞれ枠内だけを見たときにパラメータが λP_jのポアソン過程が成り立つということ

シンニングとスーパーポジション



逆に $N_1(t),\dots,N_{11}(t)$ パラメータ λP_j の独立なポアソン過程に従うとき
$N_1(t)+\cdots+N_{11}$ はパラメータ $\lambda P_1+\cdots+\lambda P_{11}=\lambda\sum_{n=1}^{11}P_n=\lambda$ のポアソン過程に従う

シンニングとスーパーポジション



一つのポアソン過程を独立同分布な列 Y_i を用いて2つ以上のポアソン過程に分割することを**シンニング**といい、逆に独立なポアソン過程の和をとることは**スーパーポジション**という

シンニングとスーパーポジション

数学的証明～シンニング～

$P(Y_i=1)=p \quad P(Y_i=2)=1-p$ 　とし二つのポアソン過程 $N_1(t)$、$N_2(t)$ を考えればよい

定義から $Y=N_1(t+s)-N_1(s)$ がパラメータλpのポアソン分布、$Z=N_2(t+s)-N_2(s)$ がパラメータ$\lambda(1-p)$ のポアソン分布に従うことが示せればよい

$Y=j \quad Z=k$ 　のとき時刻 t から時刻 $s+t$ までに $j+k$ 人の客が到着する

$$P(Y=j,Z=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!}\cdot\frac{(j+k)!}{j!k!}p^j(1-p)^k$$

$$=e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!}$$

数学的証明～スーパーポジション～

二つのポアソン過程に従う $Y=N_1(t+s)-N_1(s)$ $Z=N_2(t+s)-N_2(s)$ の増分が合わせて n だとする

$$P(Y+Z=n)=\sum_{m=0}^{n}P(Y=m)=\sum_{m=0}^{n}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m}$$

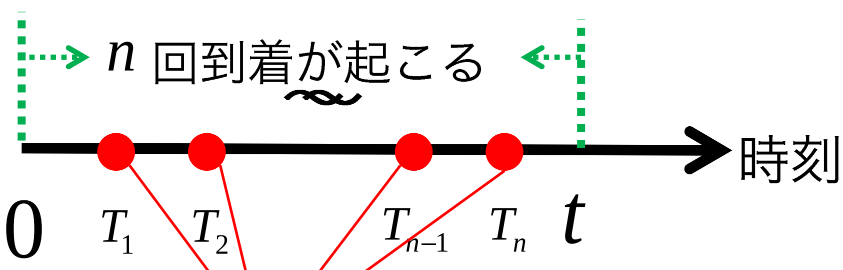
二項分布の全ての和=1

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^n}{n!}$$

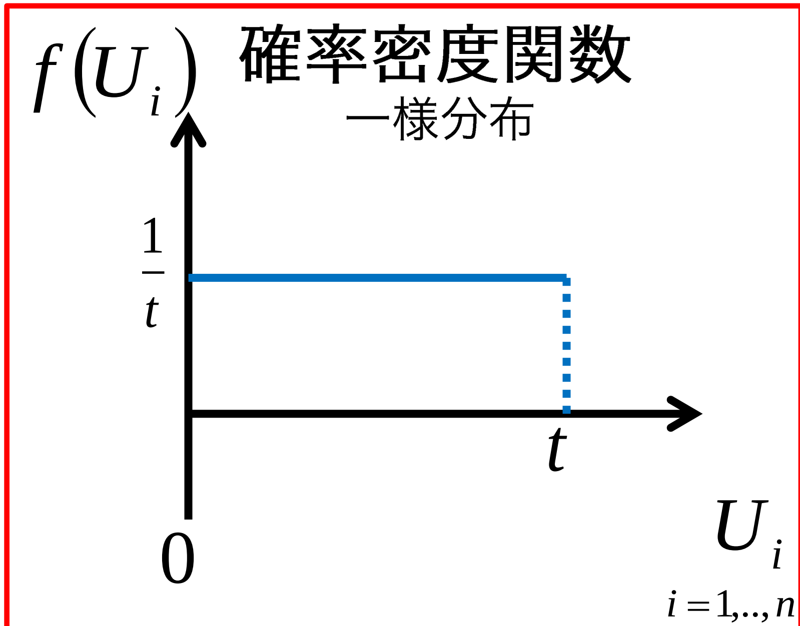
ポアソン過程と条件つき確率

時刻 $T_1,T_2,T_3,..$ をパラメータ λ のポアソン過程の到着時刻、$U_1,U_2,U_3,..,U_n$ を独立な区間 $[0,t]$ での一様分布に従う確率変数とする

条件　$N(t)=n$ を満たす、つまり時刻　t までに n 回到着が起こることが分かっているとき到着時刻の集合 $\{T_1,T_2,..T_n\}$ は $\{U_1,U_2,..U_n\}$ と同じ集合に従う



どのような集合か?

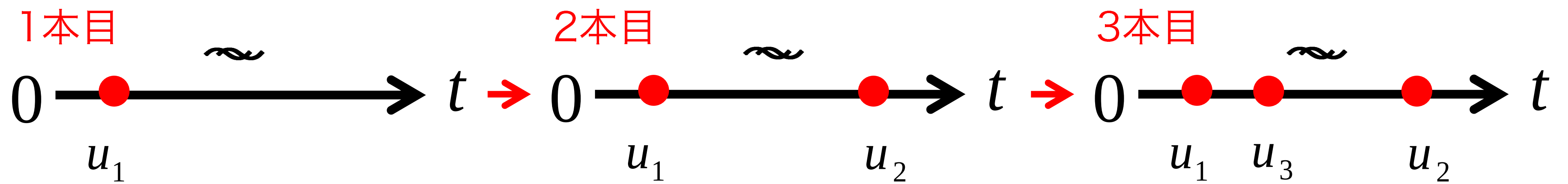


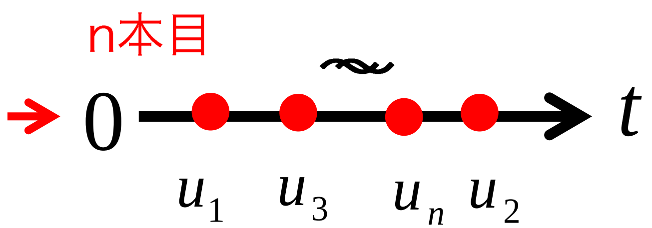
→区間 $[0,t]$ にランダムに n 本のダーツをランダムに投げた時の位置の分布と同様になる

ポアソン過程と条件つき確率

区間 $[0,t]$ にランダムに n 本のダーツをランダムに投げた時の位置の分布

ダーツをn 本投げ、その位置を順に$u_{1,..}u_n$ とする





図のような結果になる確率 $P(U_1=u_1,..,U_n=u_n)=\frac{1}{t^n}$

同様の結果は順番を並びかえれば $n!$ 個あるのでランダムにn 本ダーツを投げたときの分布は $\boxed{\frac{n!}{t^n}}$

具体的な計算例から導いてみる。例えば時刻4以前に到着が3回おこることを前提とした場合に到着時刻が $T_1=v_1,T_2=v_2,T_3=v_3$ となる確率を計算する

$$P(T_1=v_1,T_2=v_2,T_3=v_3 \mid N(4)=3)=\underbrace{P(t_1=v_1,t_2=v_2-v_1,t_3=v_3-v_2 \mid v_4>4-v_3)}_{\text{差分が指数分布に従うので}}\Big/P(N(4)=3)$$

$$=\lambda e^{-\lambda v_1}\cdot\lambda e^{-\lambda(v_2-v_1)}\cdot\lambda e^{-\lambda(v_3-v_2)}\cdot e^{-\lambda(4-v_3)}\Big/\frac{e^{-4\lambda}(4\lambda)^3}{3!}=\boxed{\frac{3!}{4^3}}$$

ポアソン過程と条件つき確率

一般化

条件 $N(t)=n$ を満たす、つまり時刻 t までに n 回到着が起こることが分かっているとき到着時刻の集合 $\{T_1,T_2,..T_n\}$ は $\{U_1,U_2,..U_n\}$ と同じ集合に従う

$$0<v_1<\cdots v_n<t \to P(T_1=v_1,..,T_n=v_n \mid N(t)=n)=n!/t^n \tag{10}$$

また同じ考え方を用いれば

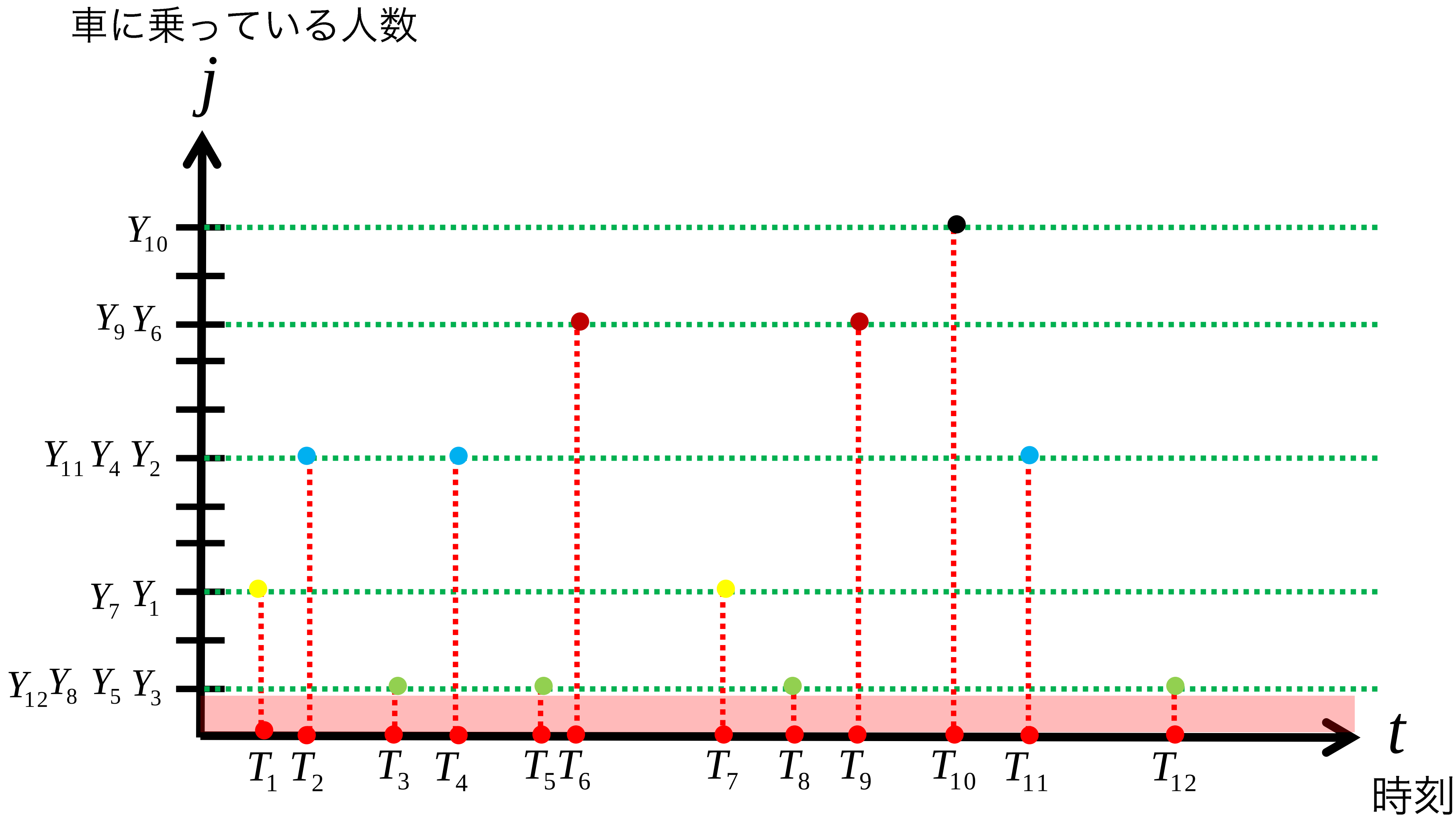
$$s<t \text{ and } 0\le m\le n \to P(N(s)=m \mid N(t)=n)={}_nC_m\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m} \tag{11}$$

計算による証明

$$P(N(s)=m \mid N(t)=n)=\frac{P(N(s)=m,N(t)-N(s)=n-m)}{P(N(t)=n)}$$

$$=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!}\Bigg/ e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!}={}_nC_m\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

空間上のポアソン過程

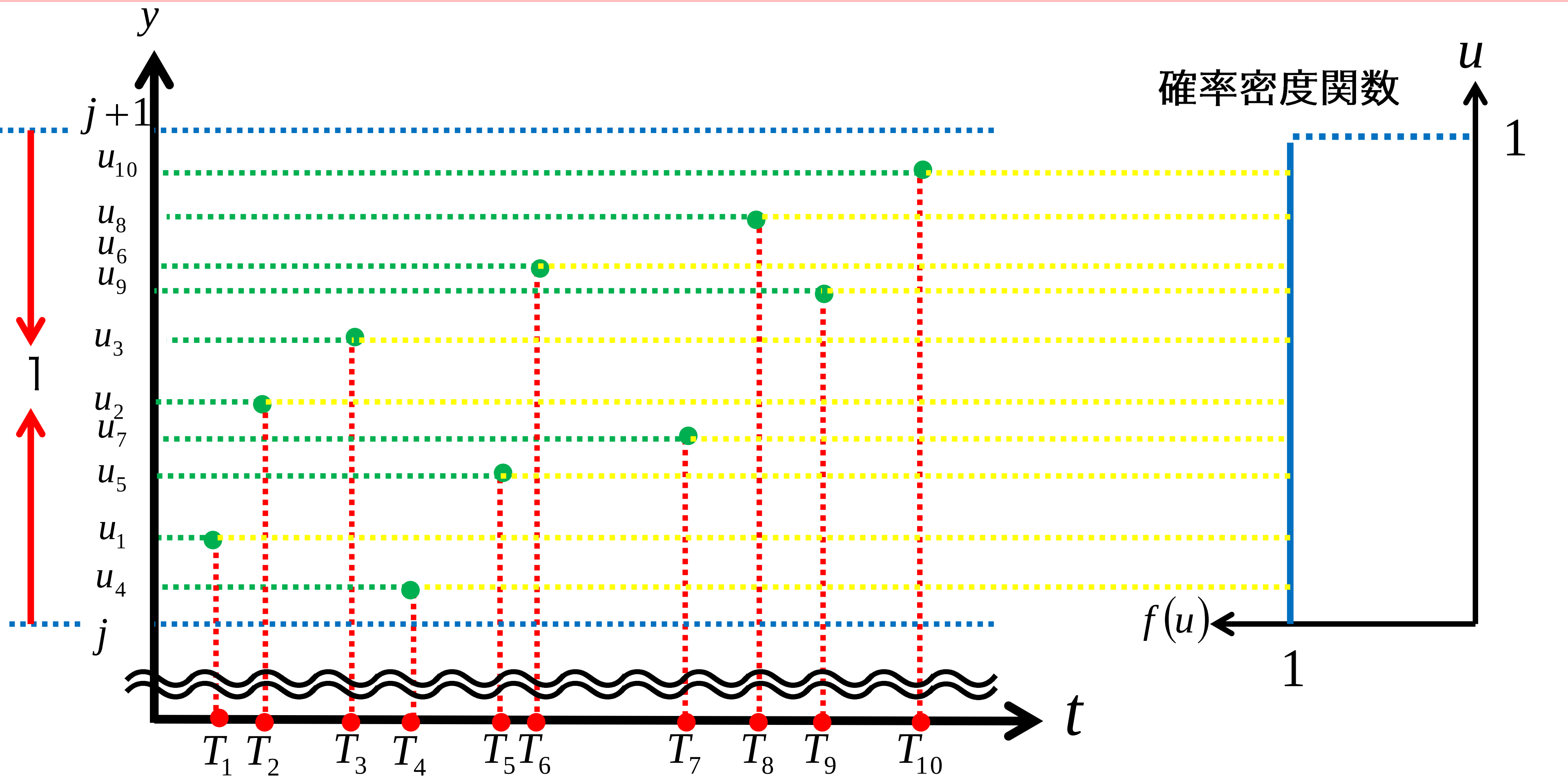


$N(t)$ はパラメータ λ のポアソン過程である

$Y_i = j$ 上の点すなわち直線 $y = j$ の点はポアソン過程になり、他の直線と独立

$\rightarrow Y_i$ を区間(0,1)で一様な確率変数 U_i に置き換えることで連続空間へ拡張する

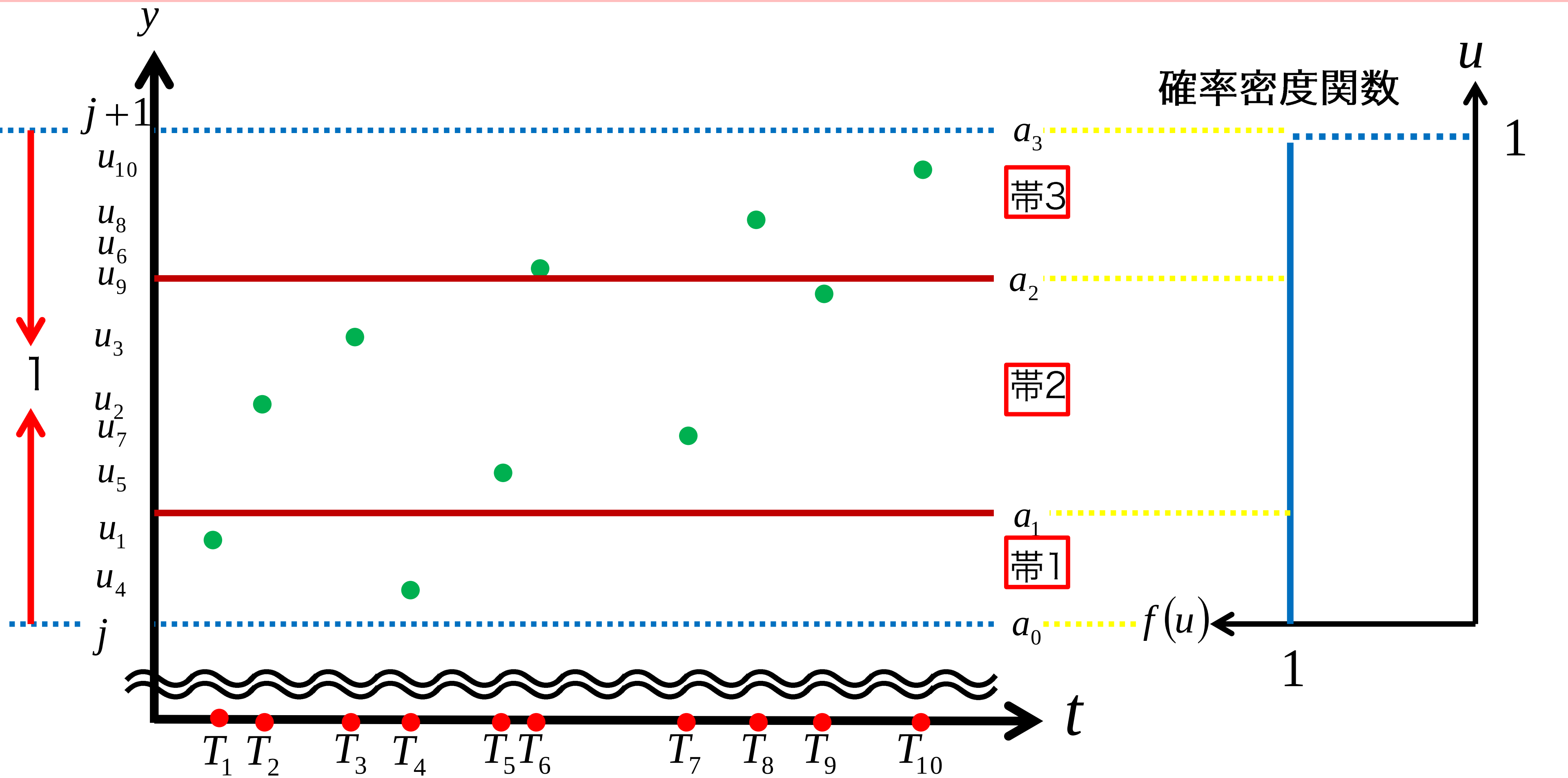
空間上のポアソン過程



$N(t)$はパラメータ λ のポアソン過程である

このときシンニングのときと同様に$y=u_i$ 上にある点について$N_{u_i}(t)$ は他の値とは独立なポアソン過程である。パラメータは$\lambda f(u_i)$だがこれは0となってしまう

空間上のポアソン過程



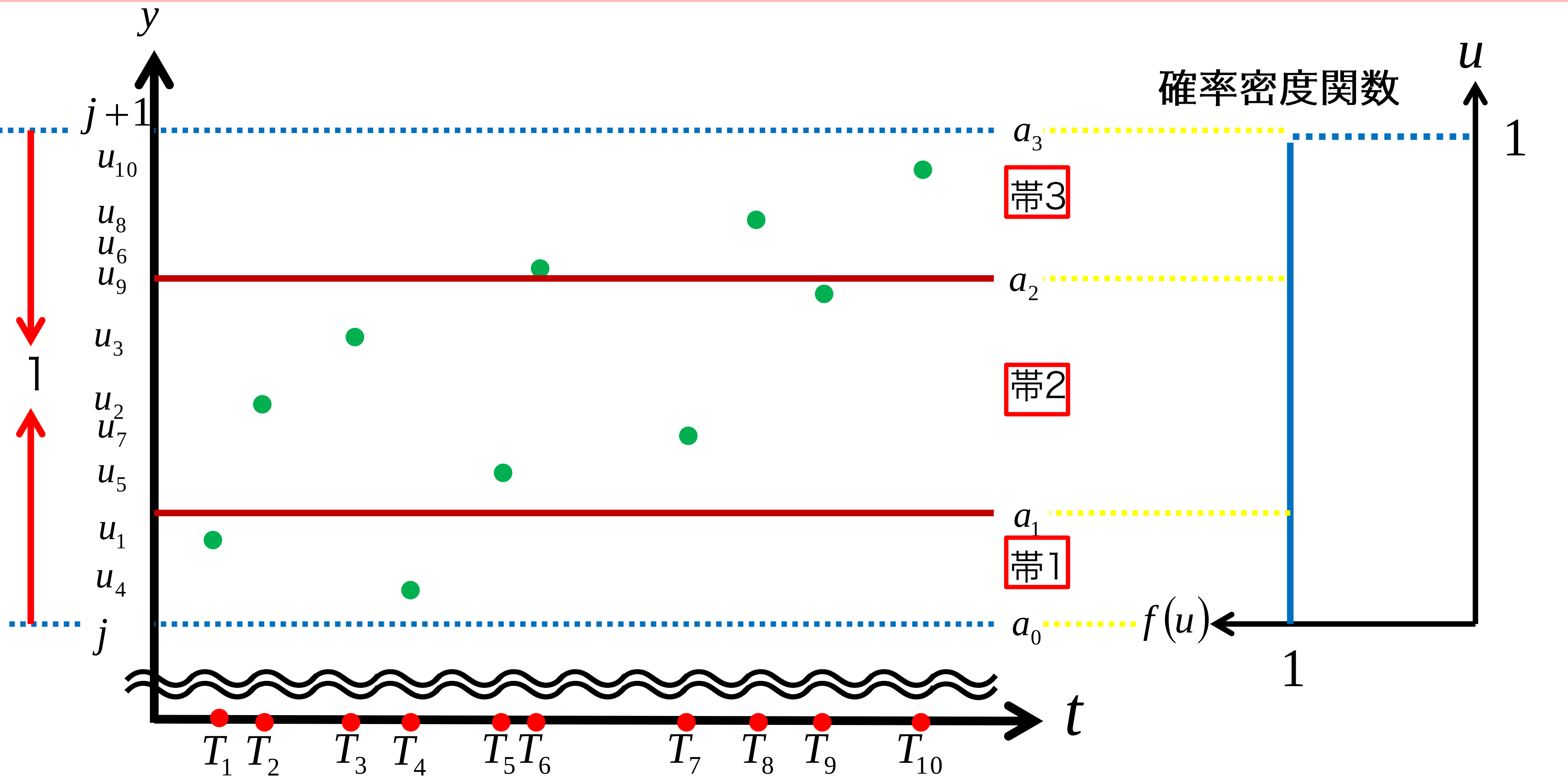
$N(t)$はパラメータ λ のポアソン過程である

上図のように$\{(t,u):0\le t<\infty, a_{m-1}<u_i\le a_m\}$となる細長い帯をつくる。帯内にある$u_i$が同一の値だとすると、帯同士の点の集合は互いに独立になる。

このときある値u_iが帯 k にある確率を$P(u_i\ in\ belt=k)$とする。

$P(u_i\ in\ belt=1)=a_1-a_0 \quad P(u_i\ in\ belt=2)=a_2-a_1 \quad P(u_i\ in\ belt=3)=a_3-a_2$

空間上のポアソン過程

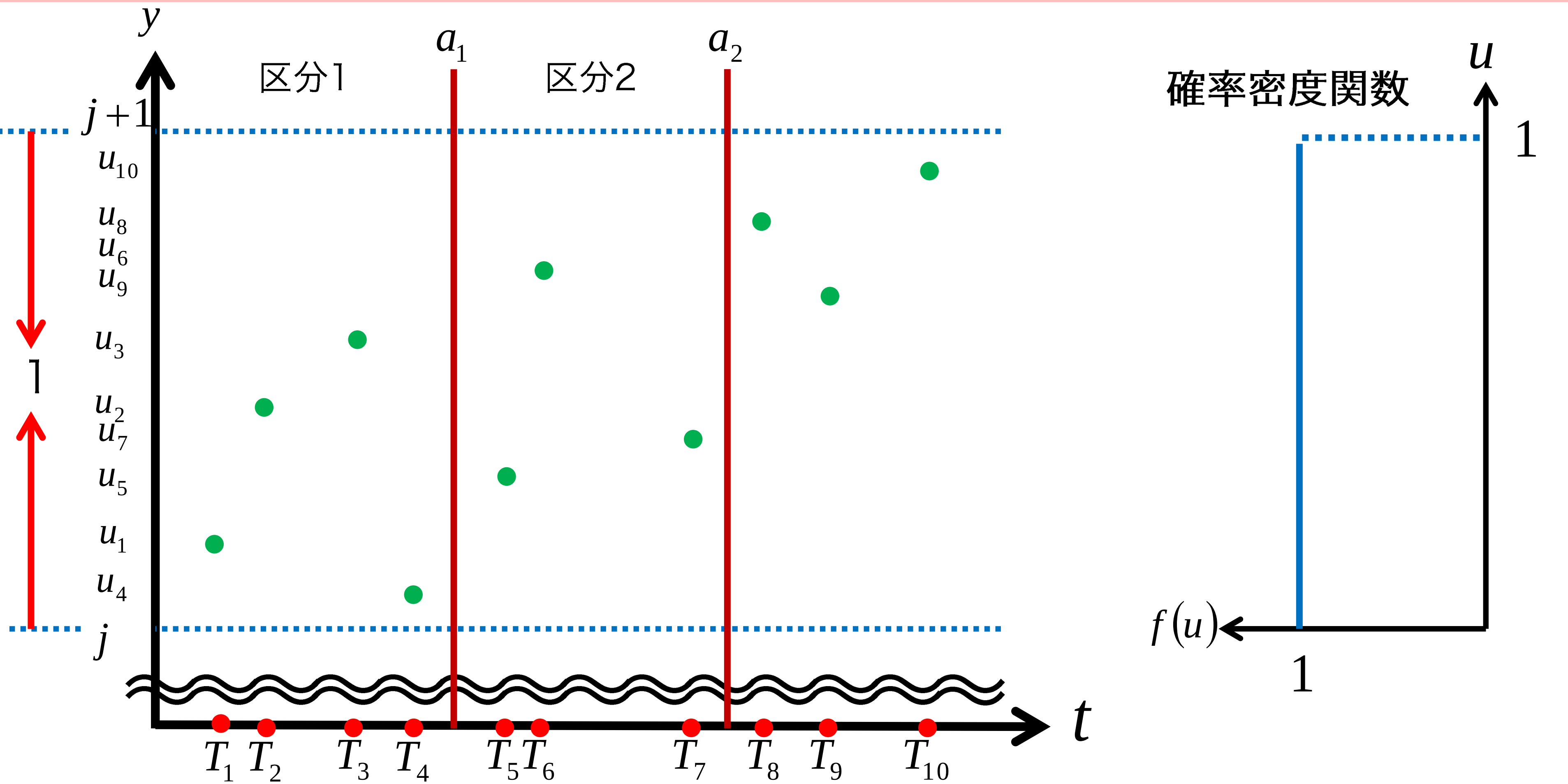


$N(t)$はパラメータ λ のポアソン過程である

このとき各帯内の点の集合についての到着回数$N_{belt,k}(t)$はポアソン過程に従うパラメータは帯1から帯3まで順番に$\lambda(a_1-a_0)$、$\lambda(a_2-a_1)$、$\lambda(a_3-a_2)$ となる

幅1の一様分布を仮定しているのである幅の中にある確率は幅の長さと等しくなる

空間上のポアソン過程

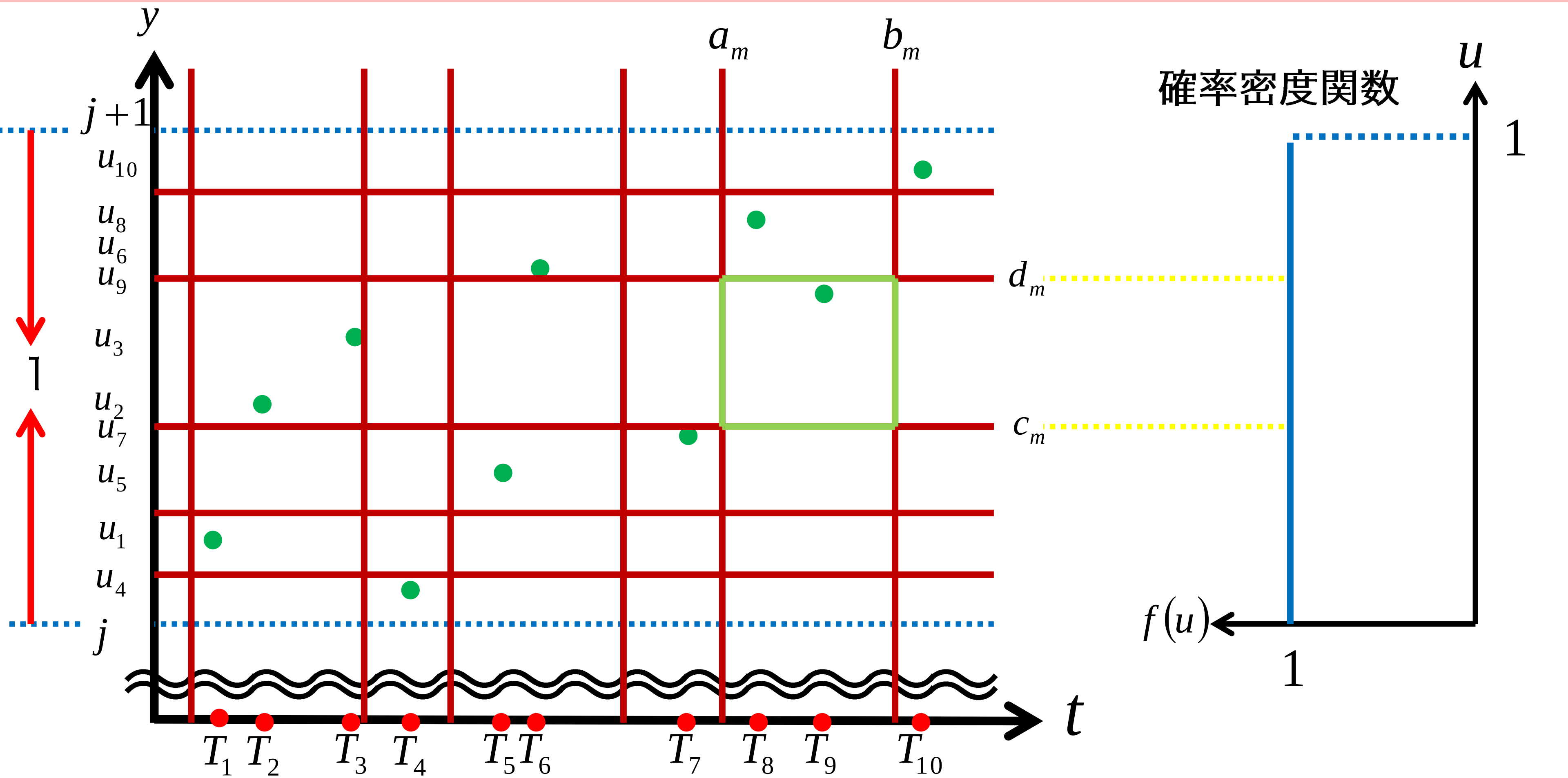


$N(t)$はパラメータ λ のポアソン過程である

上図のように横軸についてある点によって区分したときポアソン過程の定義より
$0\sim a_1$, $a_1\sim a_2$, $a_2\sim a_3$はそれぞれ独立であり、区分1,2のパラメータは順番に
$\lambda(a_1-0)$, $\lambda(a_2-a_1)$となる

横軸により区分すると区分幅×パラメータが区分内パラメータになる

空間上のポアソン過程



$N(t)$はパラメータ λ のポアソン過程である

□で囲まれた点の数を N_m とすると N_m はパラメータ $\lambda(b_m - a_m)(d_m - c_m)$の
ポアソン過程に従う→元のパラメータλ と長方形の面積の積

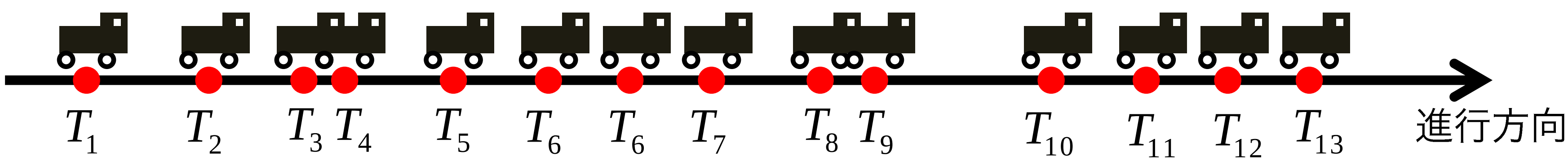
空間上のポアソン過程

一般化

$R_m = \{(t,u): a_m < t \le b_m, c_m < u \le d_m\}$ を$a_m \ge 0$ かつ$0 \le c_m < d_m \le 1$ を満たす長方形、N_m を R_m 内に存在する点(T_i, Y_i)の数とする。今長方形がどの長方形とも重ならなかった場合 N_m は独立で平均 $\mu_m = \lambda(b_m - a_m)(d_m - c_m)$をもつポアソン過程に従う

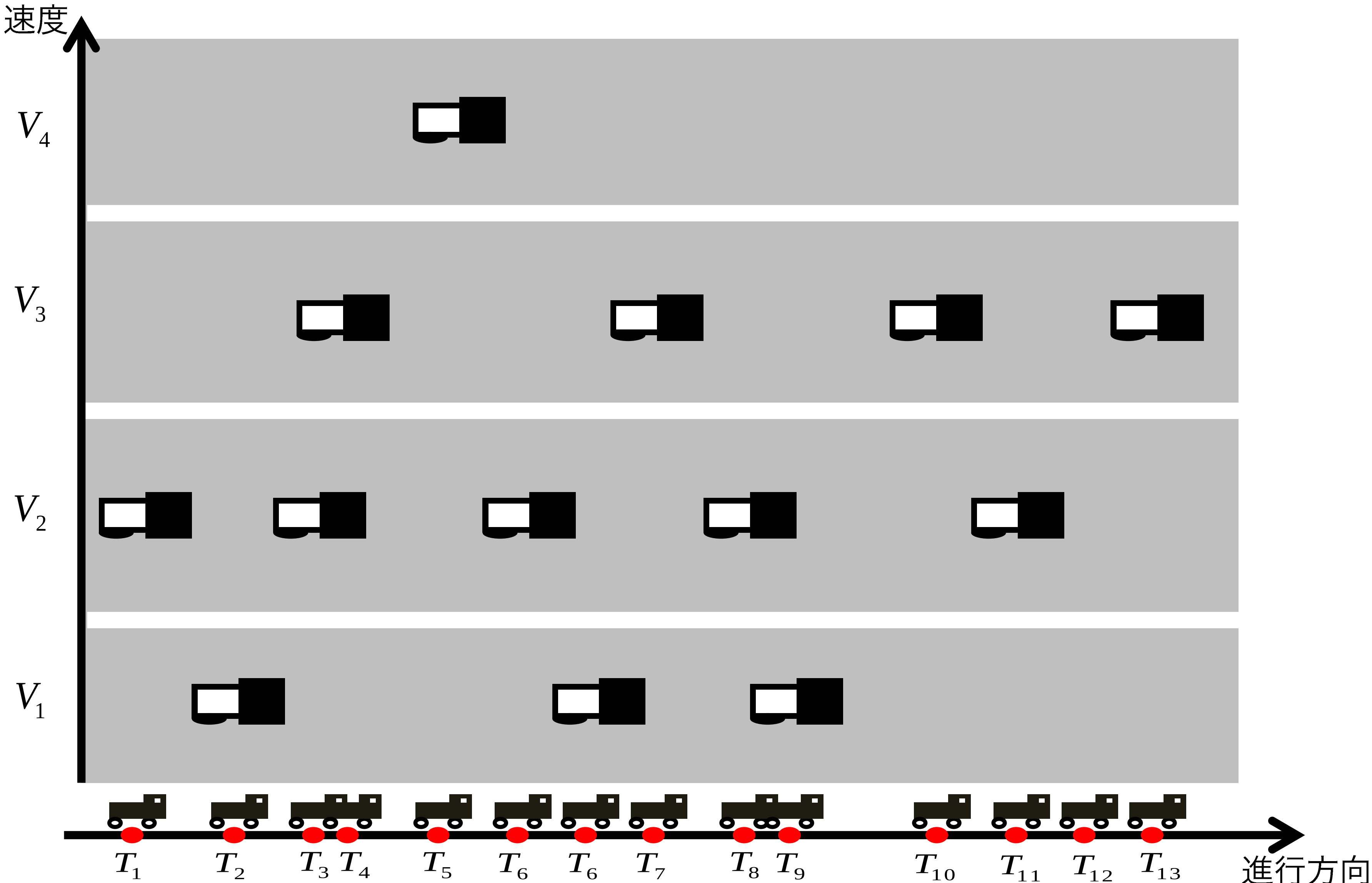
例)幅の広い道路の交通流モデル

(ｉ)1本の道路上での i 台の車の時刻0での位置をパラメータλのポアソン過程によって与える

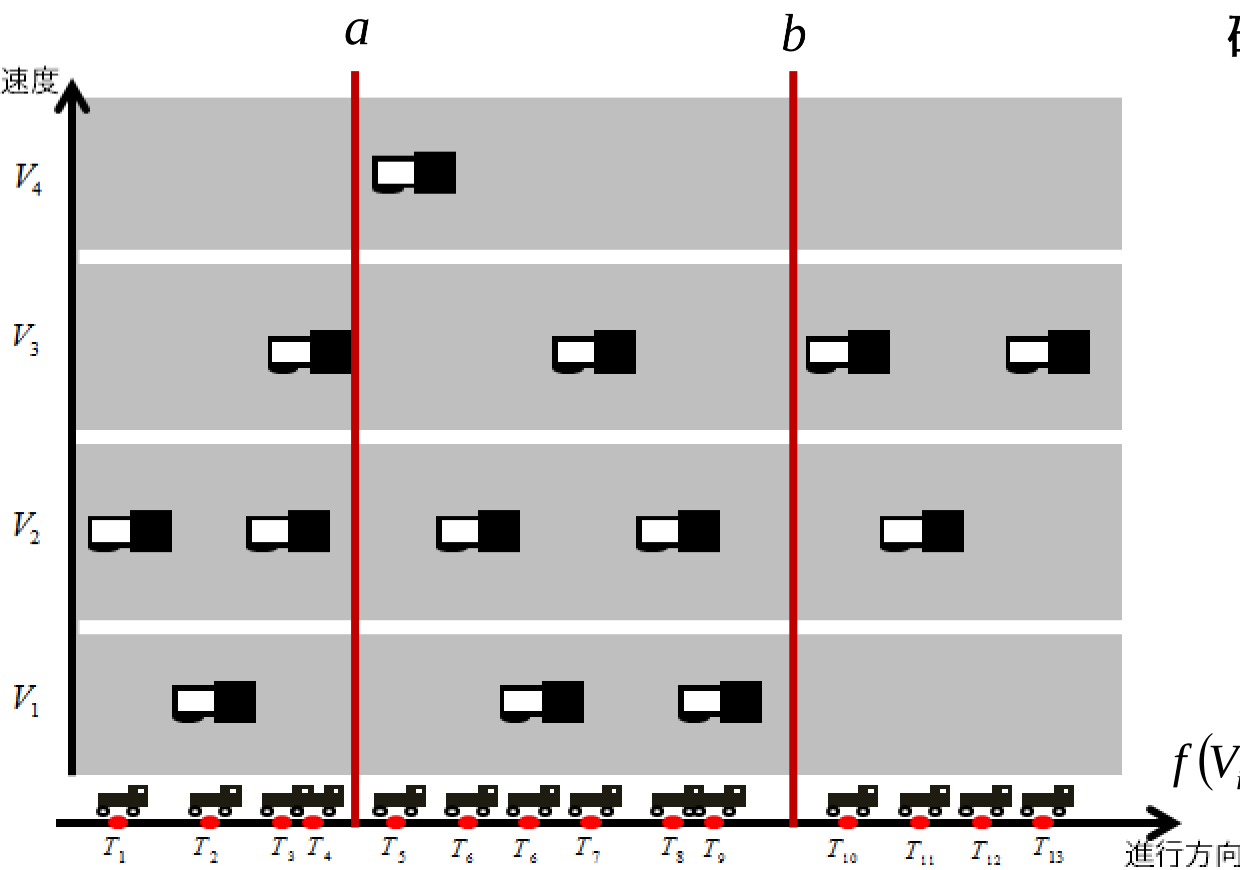


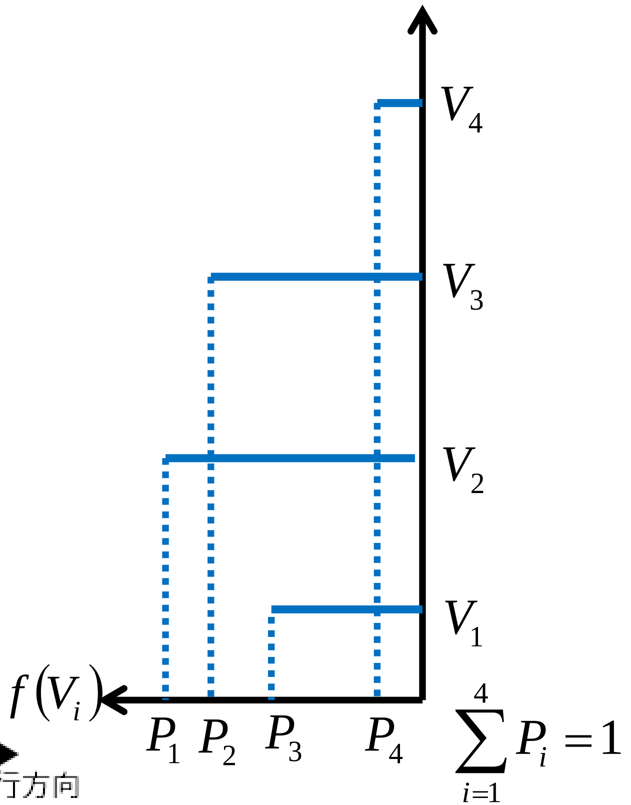
空間上のポアソン過程

(ⅱ)各車に速度を独立同分布な速度 V_i 与えるが、その時同じ速度の車は同じレーンを走っているとする



空間上のポアソン過程

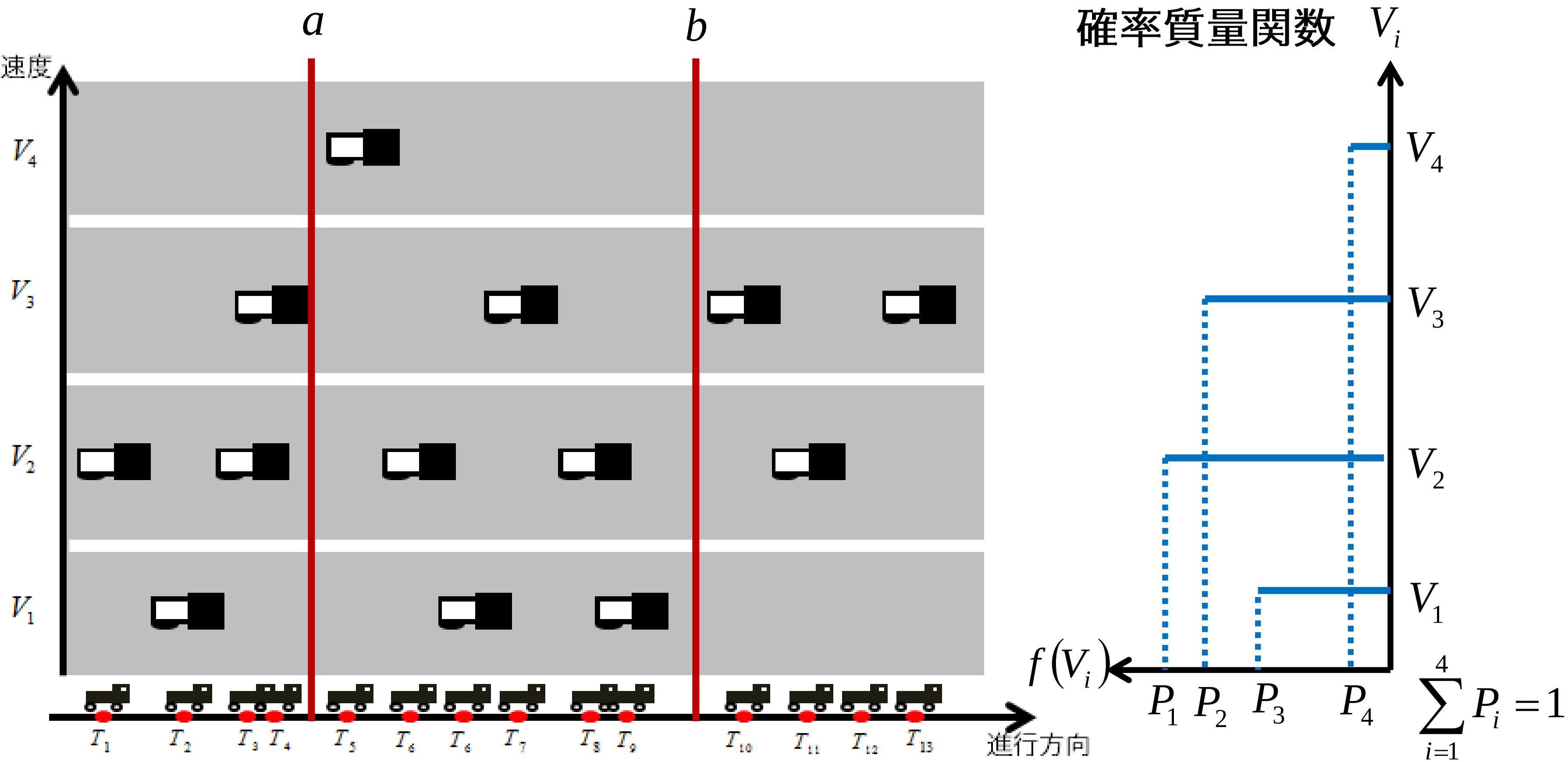




このとき速度 V_i で走行する車の数はパラメータ $\lambda f(V_i) = \lambda P_i$ のポアソン過程に従う

初期配置をポアソン過程で与えており、かつ同じ速度の車は平行して動くので時刻で　区間 $(a,b]$ に存在する数は平均 $\lambda P_i(b-a)$ のポアソン分布に従う

空間上のポアソン過程



スーパーポジションの考え方より時刻 t で区間 $(a,b]$ に存在する車の総数はパラメータ$\sum_{i=1}^{4} \lambda P_i(b-a) = \lambda(b-a)$ のポアソン過程に従う

またこのとき区間 $(a,b]$ の速度分布は元の分布と同様になる