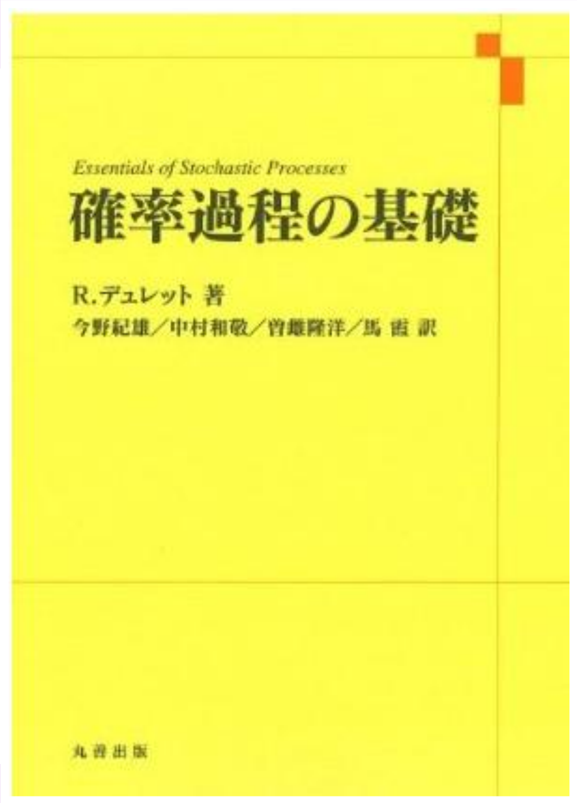
確率過程の基礎 (Essencials of Stochastic Processes)

R. デュレット 著、今野紀雄／中村和敬／曽雌隆洋／馬霞 訳

丸善出版, 2012.



第4章　連続時間マルコフ連鎖

2013年5月26日
M2　伊藤 創太

連続時間マルコフ連鎖

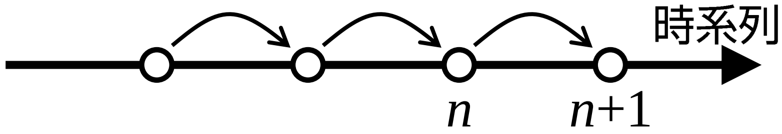
- 定義と例
- 推移確率の計算
- 極限への挙動
- 待ち行列
- 可逆測度
- 待ち行列のネットワーク
- 閉待ち行列ネットワーク

離散時間におけるマルコフ連鎖

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

時点 n で状態 i から時点 $n+1$ で状態 j へ移る確率は時点 n の状態だけに依存

状態変化は離散時点で起こる



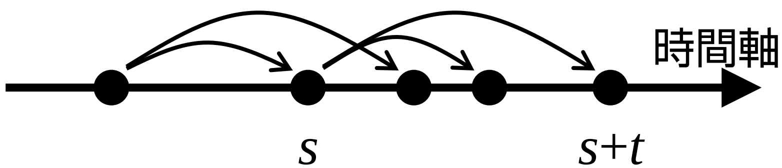
vs.

連続時間におけるマルコフ連鎖

$$P(X_{t+s}=j \mid X_s=i, X_{s_n}=i_n,\cdots,X_{s_0}=i_0)=P(X_t=j \mid X_s=i)$$

時刻 s で状態 i から時刻 $s+t$ で状態 j へ移る確率は、時刻 s の状態だけに依存

状態変化は時間軸上のどこでも起こる



将来の事象の確率は過去の履歴と無関係

連続時間におけるマルコフ連鎖の定式化

１ステップに定まった時間が存在しないので $t>0$ について推移確率を導入
時間 t 経過後に状態が i から j に推移する確率

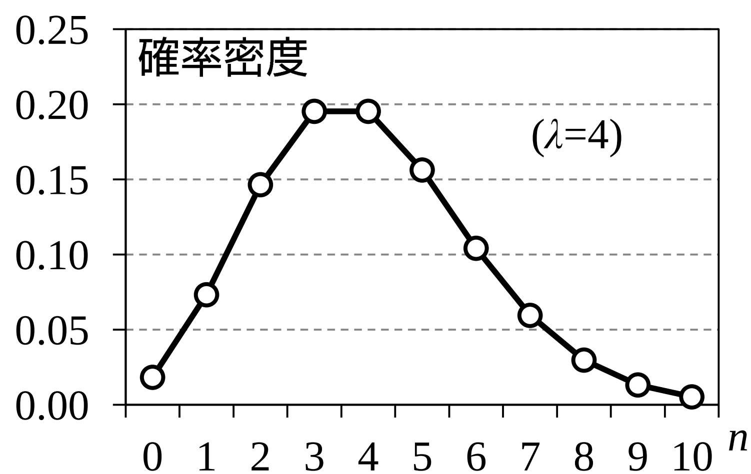
$$p_t(i,j)=P(X_t=j\,|\,X_0=i)$$

過去の状態に依存しない→無記憶性を持つ確率分布（指数分布／幾何分布）

無記憶性：　$P(X>n+k\,|\,X>n)=P(X>k)$

例えば･･･パラメータ λ のポアソン分布に従う事象の場合

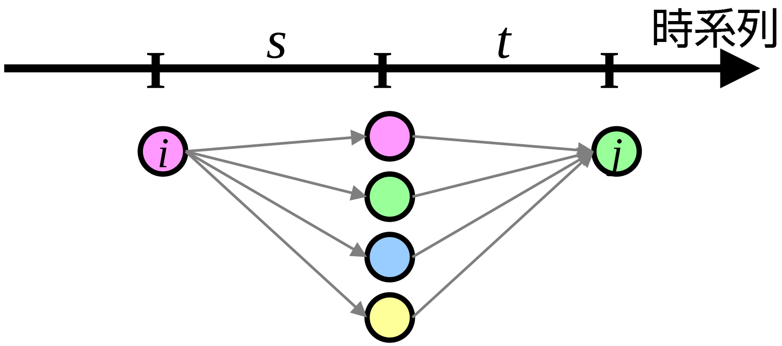
$$p_t(i,j)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}_{\text{時間 } t \text{ の間に } n \text{ 回起こる確率}}\underbrace{u^n(i,j)}_{\text{推移確率行列の } n \text{ 乗の成分}}$$



チャップマン-コルモゴロフ方程式

状態遷移が過去の履歴に関係なく独立なので、離散マルコフ同様に成立

$$\sum_k p_s(i,k)\,p_t(k,j) = p_{s+t}(i,j)$$



推移率

微小時間における状態遷移で、任意の時刻 t の推移確率を求められる

$$q(i,j) = \lim_{h \to 0} \frac{p_h(i,j)}{h} \quad (i \neq j)$$

h：微小時間

意味：単位時間あたりに遷移が起こる回数

連続時間マルコフ連鎖では、推移率を用いて問題を定式化

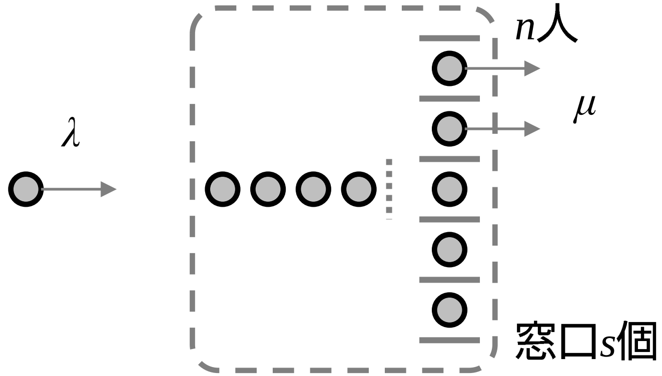
推移率の例

パラメータ λ のポアソン過程において時刻 t までの到着回数を $X(t)$ とする
n から $n+1$ に増加する推移率は、$n \geqq 0$ で、

$$q(n, n+1) = \lambda$$

待ち行列

・客はパラメータ λ のポアソン過程に従って到着
・s 個の窓口で要する時間はパラメータ μ の指数分布に従う
・現在 n 人の客がいるとする



$$q(n, n+1) = \lambda$$

客が来る分布

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu & (0 \le n \le s) \\ s\mu & (n \ge s) \end{cases}$$

客が去る分布（窓口が埋まってないとき）

客が去る分布（窓口が全部埋まっているとき）

推移確率行列

状態 i から離れるときの推移率の総和：

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i, j)$$

$\lambda_i = \infty$　のとき：状態 i からすぐに離れる
$\lambda_i = 0$　のとき：状態 i から永遠に離れない

$0 \leqq \lambda_i \leqq \infty$ と仮定すると、推移確率行列が定義できる

$$r(i, j) = \frac{q(i, j)}{\underline{\lambda_i}}$$

次の状態に遷移する中での j の割合

定常分布

連続時間マルコフ過程 X_t が既約

・任意の状態 x, y が有限回のジャンプで x から y に移動可能
・$q(x_{m-1}, x_m) > 0$ を満たす状態列 $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ が存在

連続時間マルコフ過程 X_t が既約かつ定常分布 π を持つとすると、

$$\lim_{t \to \infty} p_t(i, j) = \pi(j)$$

離散時間の定常分布

$$\pi p = \pi$$

連続時間の定常分布

$$\pi p_t = \pi$$

（任意の $t > 0$ で成立）

離散時間より条件が強くなる

定常分布

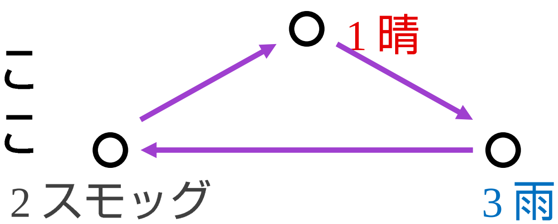
定理3.2　π が定常分布ならば、$\pi Q=0$

ここで、
$$Q(i,j)=\begin{cases} q(i,j) & j\neq i \\ -\lambda_i & j=i \end{cases}$$

$$\underbrace{\sum_{k\neq j}\pi(k)q(k,j)}_{\text{単位時間に } j \text{ へ遷移していく「量」}}=\underbrace{\pi(j)\lambda_j}_{\text{単位時間に } j \text{ から遷移していく「量」}}$$

気象連鎖

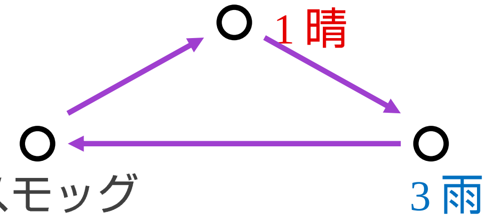
・晴が平均3の指数分布に従う日数続くとスモッグに
・スモッグが平均4の指数分布に従う日数続くと雨に
・雨が平均1の指数分布に従う日数続くと晴に



定常分布

気象連鎖

- 晴が平均3の指数分布に従う日数続くとスモッグに
- スモッグが平均4の指数分布に従う日数続くと雨に
- 雨が平均1の指数分布に従う日数続くと晴に



Q行列：

	1 晴	2 スモッグ	3 雨
1 晴	-1/3	1/3	0
2 スモッグ	0	-1/4	1/4
3 雨	1	0	-1

指数分布のパラメータは平均の逆数

$\pi Q = 0$ より、

$$-\frac{1}{3}\pi(1)+\pi(3)=0 \qquad \frac{1}{3}\pi(1)-\frac{1}{4}\pi(2)=0$$

$$\frac{1}{4}\pi(2)-\pi(3)=0 \qquad \pi(1)+\pi(2)+\pi(3)=1$$

連立方程式を解くと定常分布は、 $\pi(1)=\dfrac{3}{8} \quad \pi(2)=\dfrac{4}{8} \quad \pi(3)=\dfrac{1}{8}$

詳細つりあいの条件

連続時間の詳細つりあい条件

$$\underbrace{\pi(k)q(k,j)}_{k\to j\text{ に遷移する「量」}} = \underbrace{\pi(j)q(j,k)}_{j\to k\text{ に遷移する「量」}}$$

定理3.3 $\pi(k)q(k,j) = \pi(j)q(j,k)$ を満たすとき、π は定常分布

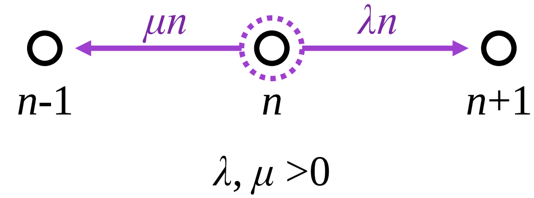
（参考：離散時間のとき）

$$\underbrace{\pi(x)p(x,y)}_{x\text{ から }y\text{ に1ステップで移る「量」}} = \underbrace{\pi(y)p(y,x)}_{y\text{ から }x\text{ に1ステップで移る「量」}}$$

詳細つりあいの条件

出生死亡連鎖

・n 個の個体が存在
・λ_n が出生パラメータ
・μ_n が死亡パラメータ



$$q(n,n+1)=\lambda_n \quad 0\le n<N$$

$$q(n,n-1)=\mu_n \quad 0\le n<N$$

詳細つりあい条件は

$$\pi(n)=\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi(n-1)$$

（πに関する漸化式）

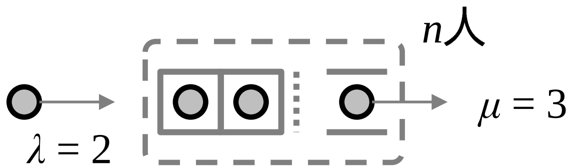
ということは、

$$\pi(n)=\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\cdot\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi(0)$$

有限待合室のあるM/M/1待ち行列

待ち行列

・来客はパラメータ2のポアソン過程に従う
・サービス時間はパラメータ3の指数分布
　（平均20分要する）
・現在n人の客がいるとする
・待合室のイスは2つ、2つ埋まっていたら客は帰ってしまう



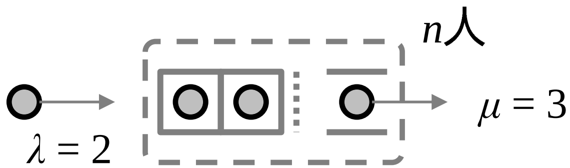
$$q(n, n+1) = 2 \quad 0 \le n < 2$$

$$q(n, n-1) = 3 \quad 1 \le n < 3$$

十分時間が経ったとき、
(a)　2つのイスが両方使われている時間の割合は？
(b)　1時間で担当できる客の数は？

有限待合室のあるM/M/1待ち行列

M/M/1待ち行列



- 来客はパラメータ2のポアソン過程に従う
- サービス時間はパラメータ3の指数分布（平均20分要する）
- 現在n人の客がいるとする
- 待合室のイスは2つ、2つ埋まっていたら客は帰ってしまう

詳細つりあい条件式： $2\pi(0)=3\pi(1)$　$2\pi(1)=3\pi(2)$　$2\pi(2)=3\pi(3)$

$\pi(0)=c$ とおくと、 $\pi(0)=c$　$\pi(1)=\frac{2}{3}c$　$\pi(2)=\frac{2}{3}\pi(1)=\frac{4}{9}c$　$\pi(3)=\frac{2}{3}\pi(2)=\frac{8}{27}c$

$$\pi(0)+\pi(1)+\pi(2)+\pi(3)=0$$

解くと、

57/65の時間は客が入ってくる　　イス両方埋まっている割合

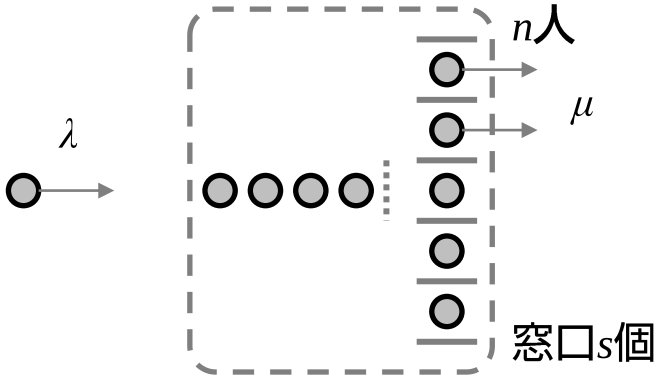
$$\boxed{\pi(0)=\frac{27}{65}\quad \pi(1)=\frac{18}{65}\quad \pi(2)=\frac{12}{65}}\ \boxed{\pi(3)=\frac{8}{65}}$$

担当できる客の数は、（1時間あたり2人）×（57/65）＝1.754人

M/M/s待ち行列

M/M/s待ち行列

・来客はパラメータ λ のポアソン過程
・サービス時間はパラメータ μ の指数分布
・現在n人の客がいるとする
・窓口の数は s



$$q(n, n+1) = \lambda$$

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu & (0 \le n \le s) \\ s\mu & (n \ge s) \end{cases}$$

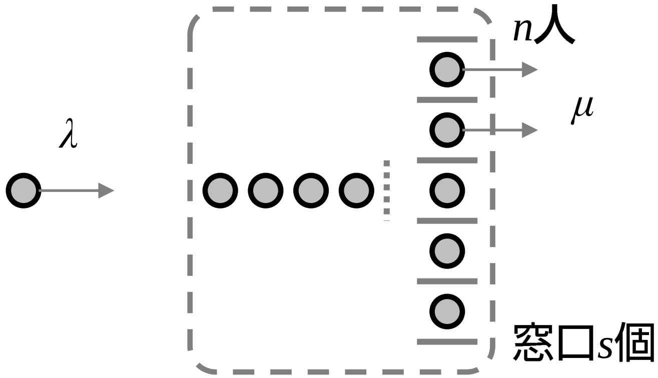
詳細つりあい条件式

$$\lambda\pi(0) = \mu\pi(1) \quad \lambda\pi(1) = 2\mu\pi(2) \quad \cdots \quad \lambda\pi(s-1) = s\mu\pi(s)$$

M/M/s待ち行列

M/M/s待ち行列

- 来客はパラメータ λ のポアソン過程
- サービス時間はパラメータ μ の指数分布
- 現在n人の客がいるとする
- 窓口の数は s



詳細つりあい条件式

$$\lambda\pi(0)=\mu\pi(1) \quad \lambda\pi(1)=2\mu\pi(2) \quad \cdots \quad \lambda\pi(s-1)=s\mu\pi(s)$$

$k \geqq 0$において

$$\pi(s+k)=\frac{\lambda}{s\mu}\pi(s+k-1) \qquad \pi(s+k)=\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k+1}\pi(s-1)$$

1未満なら定常分布が存在

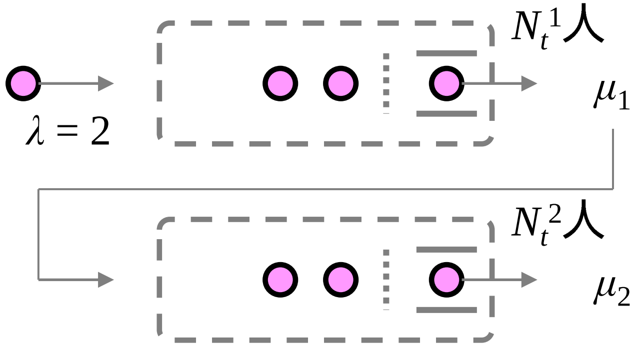
$\lambda < s\mu$ ならば $\Sigma\pi(s+k) < \infty$

よって $\pi(0)$ を定めることができ、定常分布をもつ $\rightarrow$ $\pi(n)$ を求められる

2つの待ち行列

M/M/s待ち行列

- 客はパラメータλのポアソン過程に従って到着
- サービス時間は施設1、施設2でパラメータμ_1, μ_2の指数分布に従う



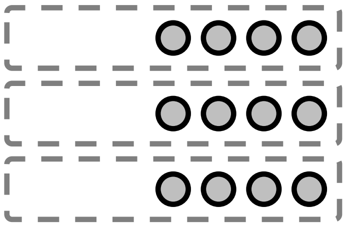
$$P(N_t^1 = m) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \qquad P(N_t^2 = n) = \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$

同時分布を考えると、2つの列の長さは独立に決まる

$$P(N_t^1 = m, N_t^2 = n) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$

閉じた移住過程

・客は系に新たに加わることも立ち去ることもない
・窓口 i に n_i 人の客がいるとき推移率 $\psi_i(n_i)$で客は他の窓口に移動する
・$\psi_i(0) = 0$
・窓口 i から j に移動する確率は $p(i, j)$



定理7.2　N 人からなる閉じた移住過程の定常分布は、$n_1+n_2+\ldots+n_K=N$ のとき、

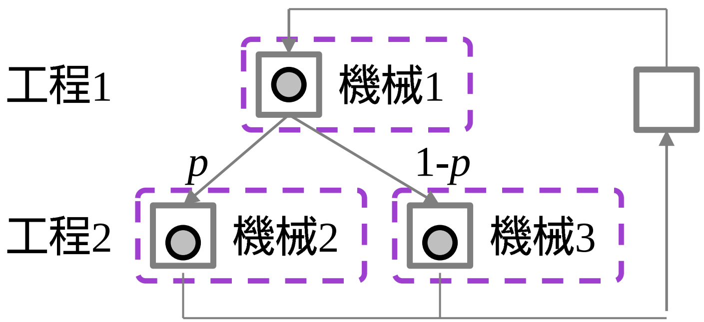
$$\pi(n_1, n_2, \cdots, n_K) = c_N \prod_{i=1}^{K} \frac{\pi_i^{n_i}}{\psi_i(n_i)}$$

c_N ：規格化定数（πの合計を1にする）

製造モデル

製造モデル

・製造工程は２つ
・工程1は機械1で、工程2は機械2,3で行う
・製品はパレットに載せて運ぶ
・パレットは再利用、合計 N 個



μ_1=1/8, μ_2=1/9, μ_3=1/12 、 $p(i,j)=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、

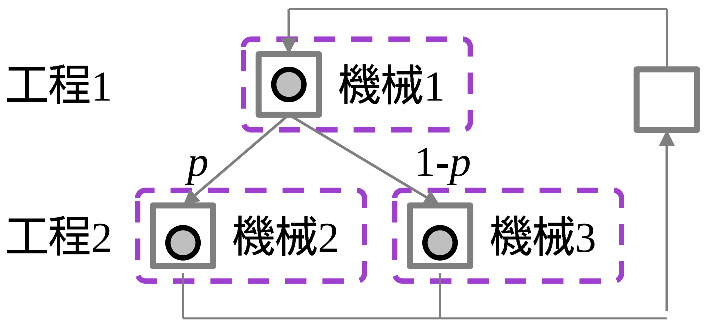
$\pi(1)=c$ とおくと、 $\pi(1)=c \quad \pi(2)=\frac{2}{3}c \quad \pi(3)=\frac{1}{3}c \qquad c=\frac{1}{2}$

$$\pi(n_1,n_2,n_3)=c_N\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}=c_N\left(\frac{1/2}{1/8}\right)^{n_1}\left(\frac{1/3}{1/9}\right)^{n_2}\left(\frac{1/6}{1/12}\right)^{n_3}=c_N 4^{n_1}3^{n_2}2^{n_3}$$

製造モデル

製造モデル

・製造工程は２つ
・工程1は機械1で、工程2は機械2,3で行う
・製品はパレットに載せて運ぶ
・パレットは再利用、合計 N 個



$\pi(n_1, n_2, n_3)$ $(n_1+n_2+n_3=N)$ を地道に求める。N=4 とすると、

$$\pi(4,0,0) = 256c_4 \quad \pi(2,0,2) = 64c_4 \quad \pi(0,4,0) = 81c_4$$
$$\pi(3,1,0) = 192c_4 \quad \pi(1,3,0) = 108c_4 \quad \pi(0,3,1) = 54c_4$$
$$\pi(3,0,1) = 128c_4 \quad \pi(1,2,1) = 72c_4 \quad \pi(0,2,2) = 36c_4$$
$$\pi(2,2,0) = 144c_4 \quad \pi(1,1,2) = 48c_4 \quad \pi(0,1,3) = 24c_4$$
$$\pi(2,1,1) = 96c_4 \quad \pi(1,0,3) = 32c_4 \quad \pi(0,0,4) = 16c_4$$

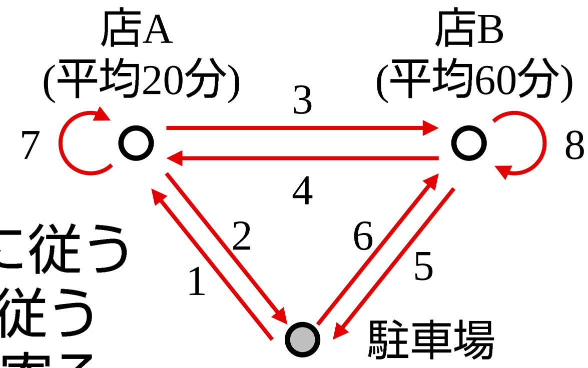
合計$1351c_4$

$c_4 = 1/1351$

定常分布が求まる

中心市街地の回遊

回遊モデル



・状態はリンク間遷移で表す
・店A,Bでの滞在はリンク7, 8で表す
・店A,Bでの滞在時間は平均20, 60[分]の指数分布に従う
・街路1～6での所要時間は平均2[分]の指数分布に従う
・来街者は歩行中に店があると、1/2の確率で立ち寄る

遷移確率は $p(i, j) = \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ \boxed{0.5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

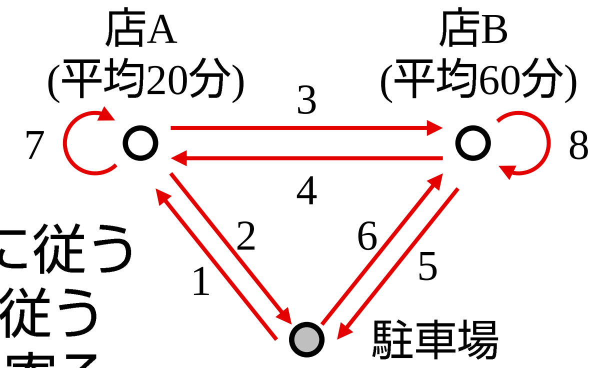
定常状態：
駐車場に１人戻ると、
他の１人が駐車場を出発する
と考える

定常分布は $\pi p=\pi, \Sigma\, \pi=1$ を解くと、$\pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_8 = 1/8$

$$\pi(n_1, n_2, \cdots, n_8) = c_N \prod_{i=1}^{8} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i} \right)^{n_i}$$

中心市街地の回遊

回遊モデル



・状態はリンク間遷移で表す
・店A,Bでの滞在はリンク7, 8で表す
・店A,Bでの滞在時間は平均20, 60[分]の指数分布に従う
・街路1〜6での所要時間は平均2[分]の指数分布に従う
・来街者は歩行中に店があると、1/2の確率で立ち寄る

N=1（ある人がどの状態にいるかに関心がある）とすると、

$$\pi(n_1=1)=\left(\frac{1/2}{1/2}\right)^1 c_8 = c_8 \qquad \cdots \qquad \pi(n_8=1)=\left(\frac{1/2}{1/60}\right)^1 c_8 = 30c_8$$

$\Sigma\pi$=1 より

$$c_8=\frac{1}{46} \qquad \pi_1=\cdots=\pi_6=\frac{1}{46} \quad \pi_7=\boxed{\frac{10}{46}} \quad \pi_8=\frac{30}{46}$$

定常状態では来街者は時間の10/46を店Aで過ごす