6章　ブラウン運動

目次

1. ブラウン運動とは
2. マルコフ性と反射原理
3. マルチンゲールと停止規則
4. 離散時間でのオプション価格
5. ブラックショールズの公式

1. ブラウン運動の定義

1. **ガウス過程である**
2. **パスが連続なマルコフ過程である**
3. **独立増分を持つ**

定義

$B(t)$が次の条件を満たすとき，分散σ^2の（1次元）ブラウン運動であると定義される

$(a) B(0)=0$

(b)独立増分　$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$であれば

$B(t_1)-B(t_0),\cdots,B(t_n)-B(t_{n-1})$は独立

(c)定常増分　B_t-B_sの分布は$t-s$にのみ依存する

$(d) B(t)$は$normal(0,\sigma^2 t)$に従う

$(e) t\to B_t$は連続である

1. ブラウン運動とは

名前の由来

- 19世紀にロバートブラウンが顕微鏡で花粉が「連続的に動きまわる」様子を発見
- 球形の花粉が，かなり大きなパラメータλのポアソン過程に従って水分子と頻繁に衝突するとき，
- 時刻0と時刻1の間の花粉の挙動は，独立で微小なランダム効果の集積によって引き起こされる
  - 座標xでの変化x(1)-x(0)は，normal(0,σ2)で近似可能

中心極限定理

弱収束=分布の意味で収束

$X_1, X_2 \cdots$を$EX_i = 0$かつ$\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$を満たす独立同分布な確率変数とする.

また，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$とおく．このとき，任意のxについて

$$P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to P(\chi \leq x)$$

ただし，χは標準正規分布，すなわち

$$P(\chi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

を満たす

2. マルコフ性

- マルコフ性
  - ブラウン運動が定常独立増分である（定義(b),(c)を満たす）ことから，次のことがわかる

(2.1)マルコフ性：$s > 0$であれば，$B_{s+t} - B_s (t \geq 0)$は$B_r (r \leq s)$と独立なブラウン運動になる

意味：将来の増分$B_{s+t} - B_s (t \geq 0)$は「時刻s以前の挙動」と独立である．

言い換えると...

(2.1)′任意の時刻$0 \leq r_1 < \cdots < r_n = s$において，$B_{s+t} - B_s (t \geq 0)$はベクトル$(B(r_1), \cdots B(r_n))$と独立なブラウン運動である

(2.2)強マルコフ性：Tが停止時刻であるとき，$B_{T+t} - B_t (t \geq 0)$は$B_r (r \leq T)$と独立なブラウン運動である．

3. マルチンゲールと停止規則

- ブラウン運動においてもマルチンゲールは成り立つ.

a. 線形マルチンゲール
b. 2次のマルチンゲール
c. 指数型マルチンゲール
d. 高次のマルチンゲール

3. マルチンゲールと停止規則

a. 線形マルチンゲール

定理

B_tはマルチンゲールである．すなわち，$s < t$であれば

$$E(B_t \mid B_r, r \le s) = B_s$$

が成り立つ

つまり…

時刻s以前のすべての履歴が与えられたときのB_tの条件つき期待値は，時刻sでの値に等しい．

任意の時刻$0 \le r_1 < \cdots < r_n < s$について

$$E(B_t \mid B_s, B_{r_n}, \cdots, B_{r_1}) = B_s$$

が成り立つこと

3．マルチンゲールと停止規則

a. 線形マルチンゲール

定理の証明

$B_r(r \le s)$が与えられたとき，B_sの値は決まり，また

$B_t - B_s$は$B_r(r \le s)$と独立で平均0なので

$$E(B_t \mid B_r, r \le s) = E(B_s + B_t - B_s \mid B_r, r \le s)$$

$$= B_s + E(B_t - B_s \mid B_r, r \le s) = B_s$$

有界なマルチンゲールに対する任意停止定理

$M_t(t \ge 0)$を連続なパスをもつマルチンゲールとする．

Tは$P(T < \infty) = 1$を満たす停止時刻とする．このとき，

$$EM_T = EM_0$$

が成り立つ

3. マルチンゲールと停止規則

a. 線形マルチンゲール

(a,b)からの脱出時刻を$\tau = \min\{t : B_t \notin (a,b)\}$で定義すると

$$P(B_\tau = b) = \frac{-a}{b-a}, P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$$

が成り立つ．ただし，$a < 0 < b$とする．

$$0 = EB_\tau = aP(B_\tau = a) + bP(B_\tau = b)$$

ただし，$P(B_\tau = a) + P(B_\tau = b) = 1$

より上式が求まる

3. マルチンゲールと停止規則

b.2次のマルチンゲール

定理

$B_t{}^2 - t$はマルチンゲールである．すなわち，$s < t$であれば

$E(B_t{}^2 - t \mid B_r, r \le s) = B_s{}^2 - s$

が成り立つ

証明：

$B_r(r \le s)$をあたえると，B_sの値は既知となり，さらに$B_t - B_s$は

$B_r(r \le s)$と独立であり，平均0，分散$t - s$なので，

$$E(B_t{}^2 \mid B_r, r \le s) = E(\{B_s + B_t - B_s\}^2 \mid B_r, r \le s)$$

$$= B_s{}^2 + 2B_s E(B_t - B_s \mid B_r, r \le s) + E((B_t - B_s)^2 \mid B_r, r \le s)$$

$$= B_s{}^2 + 0 + t - s$$

両辺からtを引くと定理の式になる．

3. マルチンゲールと停止規則

c.指数型マルチンゲール

まず，次の関係式に注目しよう.

$$-\frac{x^2}{2u}+\theta x=-\frac{(x-u\theta)^2}{2u}+\frac{u\theta^2}{2}$$

上記の式を用いて，以下の計算を行うことができる.

$$E(\exp(\theta B_u))=\int e^{\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}e^{-x^2/2u}dx$$

$$=e^{u\theta^2/2}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\exp(-\frac{(x-u\theta)^2}{2u})dx=e^{u\theta^2/2}$$

$normal(u\theta,u)$の密度関数

3．マルチンゲールと停止規則

c.指数型マルチンゲール

定理(3.8)

$\exp(\theta B_t - t\theta^2/2)$はマルチンゲールである．すなわち，$s < t$のとき

$$E(\exp(\theta B_t - t\theta^2/2) \mid B_r, r \le s) = \exp(\theta B_s - s\theta^2/2)$$

証明

$$E(\exp(\theta B_t) \mid B_r, r \le s) = \exp(\theta B_s) E(\exp(\theta(B_t - B_s)) \mid B_r, r \le s)$$
$$= \exp(\theta B_s + (t-s)\theta^2/2)$$

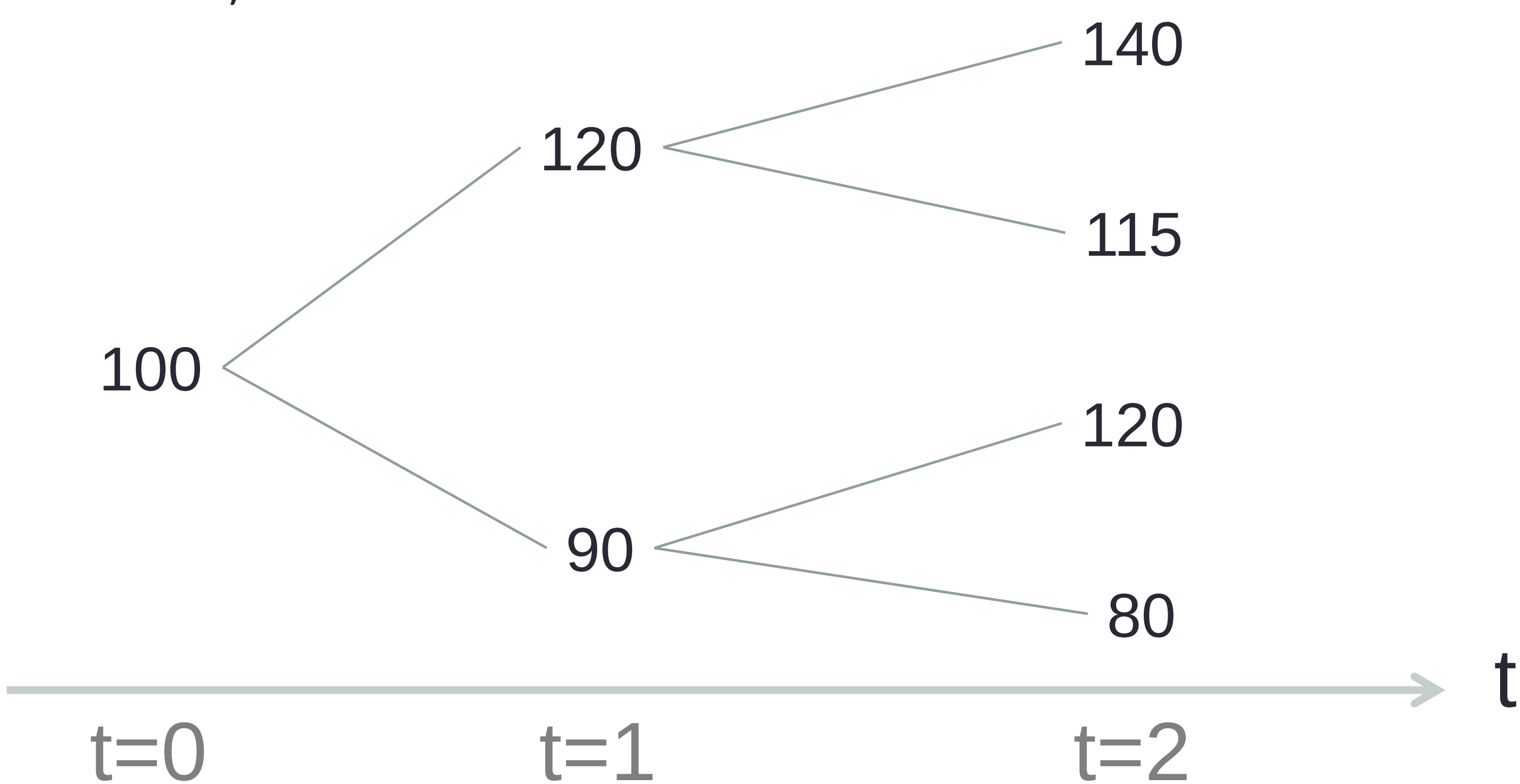
両辺に$\exp(-t\theta^2/2)$をかけると，定理の式になる．

離散時間でのオプション価格

簡単な株価の例

- 権利行使価格100，満期2のヨーロッパ型コールオプション
- 利益は　max{X2-100，0}

  ただし，X t :時点tにおける株価

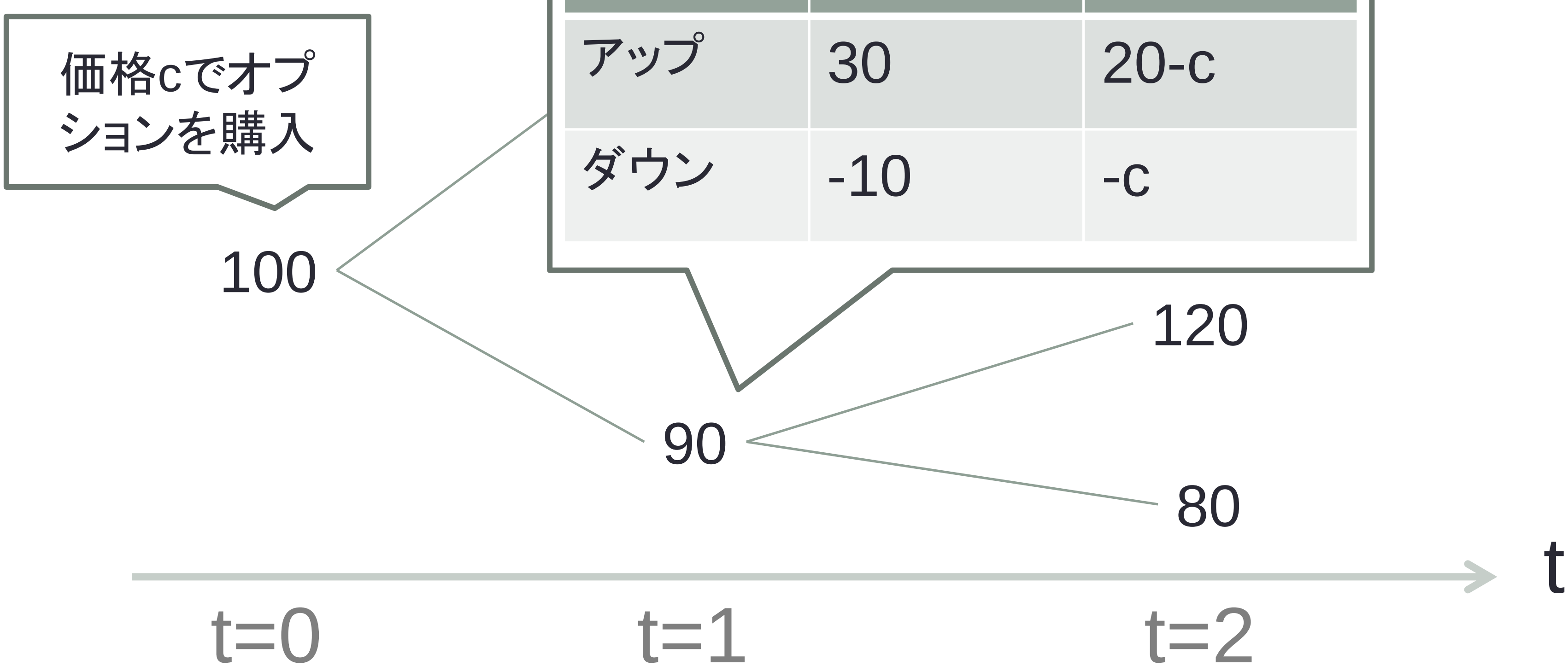


離散時間でのオプション価格

適正なオプション価格は？

- X1=90の場合を考える（ツリーの一部）

	株価	オプション
アップ	30	20-c
ダウン	-10	-c



離散時間でのオプション価格

適正なオプション価格は？

- 株をx単位，オプションをy単位購入するとする
- 株価の変動によらず結果が同じになるようにするには以下を満たすx,yを定めればよい

$$\underbrace{30x+(20-c)y}_{\text{アップしたとき}} = \underbrace{-10x+(-c)y}_{\text{ダウンしたとき}}$$

上記を解くと，$y=-2x$

右辺に代入．利益は，$(-10+2c)x$

利益を上げるためには

c>5の場合：株を大量に購入してその2倍のオプションを行使

この場合のオプション価格は唯一に決まり，5である．

離散時間でのオプション価格

一般化すると

- j番目の結果が判明したとき，i番目の保証に対する利益をai,jとすると，次の定理が成り立つ

定理 次の2つの事象のうち，必ずどちらかが成り立つ

(i)各$j(1 \le j \le n)$に対して$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j} \ge 0$であり，かつ，

あるkに対しては$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,k} > 0$であるような投資戦略$x_i$が存在する．

少なくとも一つの株価については正の利益を得る

(ii)任意のiについて$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_j = 0$を満たすような確率ベクトル$p_j > 0$が存在する．

株価変動の期待値が0

離散時間でのオプション価格

再び株価の事例

先ほどの定理を用いて，シナリオツリーの確率の表を作ると以下のようになる

X_1	X_2	確率	$(X_2-100)^+$
120	140	$(1/3)\cdot(1/5)$	40
120	115		
90	120		
90	80		

定理(ii)より，変動の期待値が0なので
(120-100)*p1+(90-100)*p2=0
s.t.p1+p2=1より，p1=1/3,p2=2/3

オプション価格は以下の式で与えられる

$$\frac{1}{15}\cdot 40+\frac{4}{15}\cdot 15+\frac{1}{6}\cdot 20=10$$

ブラックショールズの公式

価格Xtが以下の式で定められる株式を原資産とする権利行使価格がKで満期がTのヨーロッパ型コール・オプション$(X_T - K)^+$の適正価格を求めよう

$$X_t = X_0 \cdot \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

ここで，B_tは標準ブラウン運動，μは株価の指数的な変化率

σはボラティリティ（予想変動率）であるとする

ただし，μ, σは一定であるとし，利率rも一定とすると割引株価は

$$e^{-rt} X_t = X_0 \cdot \exp((\mu - r)t + \sigma B_t)$$

時刻tでの1ドルが，今日現在でのe^{-rt}に相当

ブラックショールズの公式

$e^{-rt}X_t = X_0 \cdot \exp((\mu - r)t + \sigma B_t)$

$\exp(\theta B_t - (t\theta^2/2))$がマルチンゲールである(定理3.8)より，

$\mu = r - \sigma^2/2$

であれば割引価格$e^{-rt}X_t$はマルチンゲールになることがわかる

ここで，$\log(X_t/X_0)$が$normal(\mu t, \sigma^2 t)$に従うことを用いると，

$$E(e^{-rt}(X_t - K)^+) = e^{-rt}\int_{\log(K/X_0)}^{\infty}(X_0 e^y - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-(y-\mu t)^2/2\sigma^2 t}dy$$

積分計算を進めていくと…

ブラックショールズの公式

ブラックショールズの公式

ヨーロッパ型コールオプションの価格$(X_t - K)^+$に対する期待値は

$$X_0\Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha) - e^{-rt}K\Phi(-\alpha)$$

ただし，$\alpha = \{\log(K / X_0 e^{\mu t})\} / \sigma\sqrt{t}, \mu = r - \sigma^2 / 2$

ブラックショールズの公式

$$E(e^{-rt}(X_t-K)^+)=e^{-rt}\int_{\log(K/X_0)}^{\infty}(X_0e^y-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-(y-\mu t)^2/2\sigma^2 t}dy(*)$$

$$(*)=e^{-rt}X_0e^{\mu t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{\omega\alpha\sqrt{t}}e^{-\omega^2/2}d\omega-e^{-rt}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-\omega^2/2}d\omega$$

$$e^{-rt}X_0e^{\mu t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{\omega\alpha\sqrt{t}}e^{-\omega^2/2}d\omega=e^{t\sigma^2/2}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-(\omega-\sigma\sqrt{t})^2/2}d\omega$$

$$=e^{t\sigma^2/2}P(normal(\sigma\sqrt{t},1)>\alpha)$$