第6章　フィルタ理論
情報理論

中川正雄, 真壁利明 ,理工学基礎　確率過程 ,培風館

2013/05/26(日)
確率過程ゼミ
浦田　淳司

BehaviorInNetworks
都市生活行動学研究室

内容

6-1 待ち行列過程

6-2 フィルタ理論

ーフィルタの入出力

ー整合フィルタ

6-3 情報理論

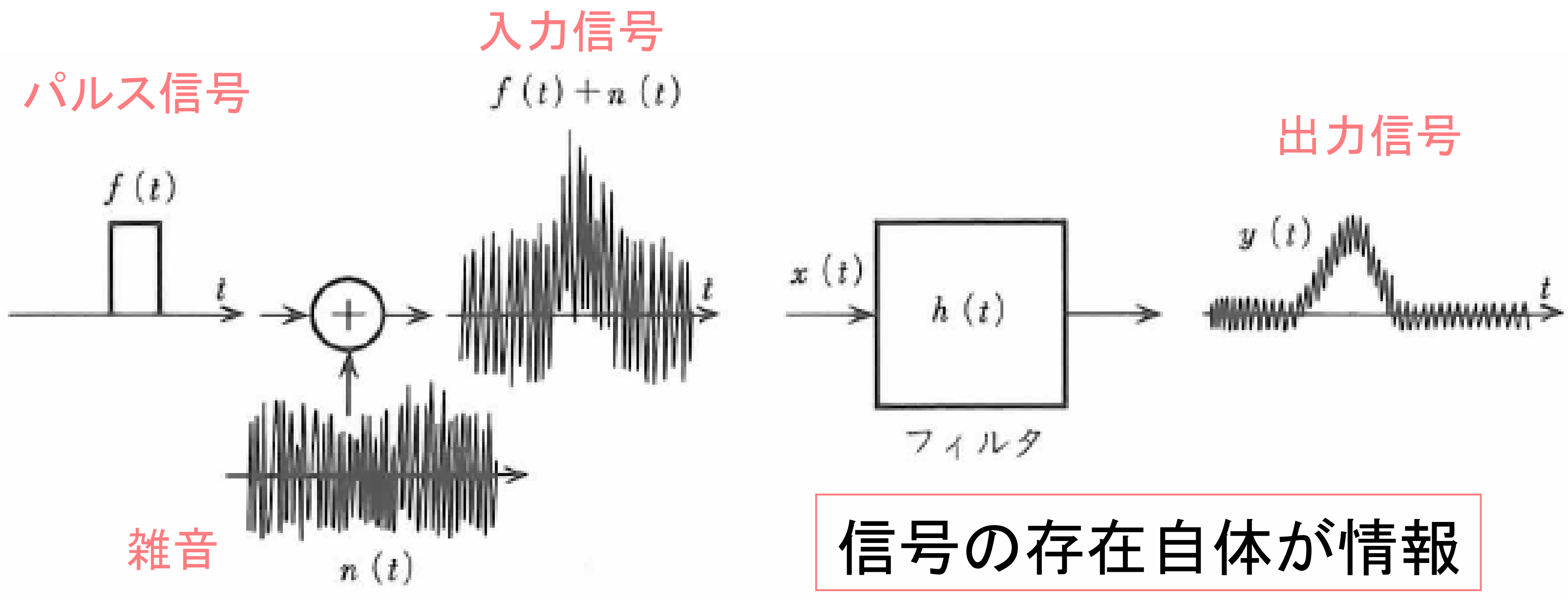
ー情報量，エントロピー

ー情報源

ー情報伝搬

6章
確率論と確率過程の応用

フィルタと信号



信号の存在自体が情報

信号の存在を拾うための
通過帯域等のフィルタ設計が必要

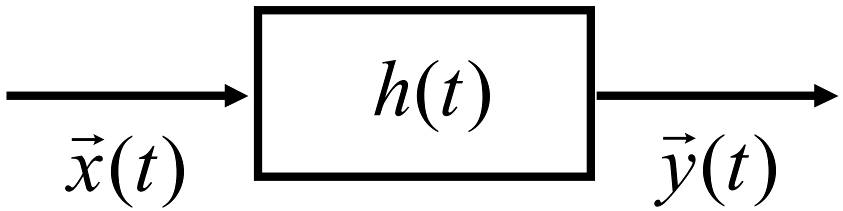
フィルタとは

フィルタ：必要な信号を不要な信号・雑音の中から取り出すシステム
→フィルタの設計に確率論がいかに用いられているか

線形フィルタ：入力と出力の間に線形関係がある

$$\vec{y}(t) = \int_0^\infty h(\eta)\vec{x}(t-\eta)\,d\eta$$

線形フィルタ（インパルス応答）



入力の定常確率過程　　　　　出力の定常確率過程

t: 時間

フィルタ(定常過程)の基礎(集合平均)

集合平均

$$\vec{E}[\vec{y}(t)] = E\left[\int_0^\infty h(\eta)\vec{x}(t-\eta)d\eta\right] = \int_0^\infty h(\eta)\vec{E}[\vec{x}(t-\eta)]d\eta$$

入力xの平均となる(積分の内側に入る)

集合平均は時間一定なので

$$\vec{E}[\vec{x}(t-\eta)] = \vec{E}[\vec{x}(t)] = m_x \longrightarrow \vec{E}[\vec{y}(t)] = m_x \int_0^\infty h(\eta)d\eta$$

基礎:相関関数

自己相関関数
$$R_{yy}(\tau)=E\left[\vec{y}(t)\vec{y}(t+\tau)\right]$$
$$=E\left[\int_0^\infty h(\eta)\vec{x}(t-\eta)d\eta\int_0^\infty h(\eta')\vec{x}(t+\tau-\eta')d\eta'\right]$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\eta)h(\eta')E\left[\vec{x}(t-\eta)\vec{x}(t+\tau-\eta')\right]d\eta d\eta'$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\eta)h(\eta')\underline{R_{xx}(\tau-\eta'+\eta)}d\eta d\eta'$$

入力の自己相関関数

相互相関関数
$$R_{xy}(\tau)=E\left[\vec{x}(t)\vec{y}(t+\tau)\right]$$
$$=E\left[\vec{x}(t)\int_0^\infty h(\eta)\vec{x}(t+\tau-\eta)d\eta\right]$$
$$=\int_0^\infty h(\eta)E\left[\vec{x}(t)\vec{x}(t+\tau-\eta)\right]d\eta$$
$$=\int_0^\infty h(\eta)\underline{R_{xx}(\tau-\eta)}d\eta$$

基礎：パワースペクトル密度

自己相関関数のフーリエ変換をパワースペクトル密度という

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-i\omega t} d\tau$$

$$= \left| H(\omega) \right|^2 S_{xx}(\omega)$$

伝達関数 $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$ フィルタのフーリエ変換

$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega t} d\tau$ 入力のフーリエ変換

出力y(t)のパワーは

$E\left\{ \vec{y}^2(t) \right\} = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega$ フーリエ逆変換

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 S_{xx}(\omega) d\omega$$

基礎：パワースペクトル密度

相互スペクトル密度関数

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega t} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{h(\eta) R_{xx}(\tau-\eta) d\eta\} e^{-i\omega t} d\tau$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\eta) e^{-i\omega(\tau-\eta)} d\tau\right\}$$

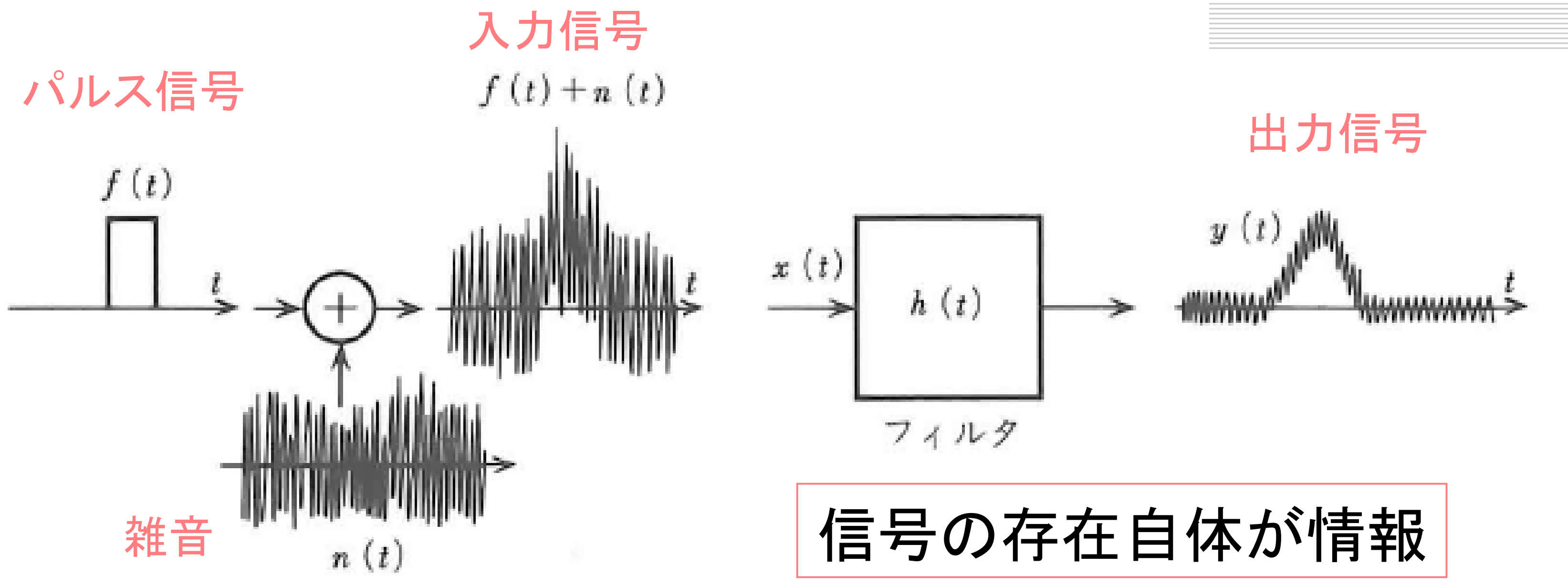
$$= H(\omega) S_{xx}(\omega)$$

伝達関数の分解

$$H(\omega) = A(\omega) e^{-i\varphi(\omega)}$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = A^2(\omega) S_{xx}(\omega)$$

フィルタと信号



信号の存在自体が情報

信号の存在を拾うための
通過帯域等のフィルタ設計が必要

信号成分　ピーク時間

フィルタの評価量
ー信号対雑音比（SNR）

$$SNR = \frac{|y_f(t_m)|}{\sqrt{E\left[y_n^2(t)\right]}}$$

雑音成分

最大化

SNRの最大化

フィルタの評価量
ー信号対雑音比（SNR）

$$SNR = \frac{\left| y_f(t_m) \right|}{\sqrt{E\left[y_n^2(t) \right]}}$$

最大化

信号成分と
雑音成分の分解

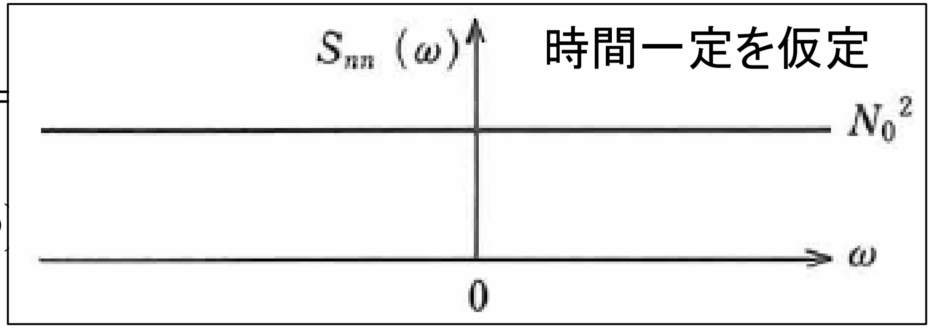
$$y(t) = \int_0^\infty h(\eta) x(t-\eta) d\eta$$

$$= \int_0^\infty h(\eta) f(t-\eta) d\eta + \int_0^\infty h(\eta) n(t-\eta) d\eta = y_f(t) + y_n(t)$$

SNRの分子
（信号成分）

$$Y_f(\omega) = H(\omega) F(\omega) =$$

$$y_f(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega$$



SNRの分母
（雑音のパワー
スペクトル密度）

$$E\left\{ \vec{y}^2(t) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 N(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 d\omega$$

SNRの最大化

$$SNR = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{-i\omega t_m} d\omega \right|}{\sqrt{\frac{N_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 d\omega}}$$

シュバルツの不等式より $\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) k(t) dt \right]^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} k^2(t) dt \right]$

$$SNR \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 d\omega} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) e^{-i\omega t_m} \right|^2 d\omega}}{\sqrt{\frac{N_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 d\omega}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi N_0^2} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega}$$

SNR大⇔N0小，Fのエネルギー大

シュバルツの不等式で等号成立は，gとkが複素共役のときであり，

$$H(\omega) = F^*(\omega) e^{-i\omega t_m}$$

フィルタの導出

フィルタh(t)は逆フーリエ変換より

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)e^{-i\omega t_m}e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega)e^{i\omega(-t+t_m)}d\omega = f(t_m - t)$$

tmずらし，正負逆転

$H(\omega) = F^*(\omega)e^{-i\omega t_m}$ より，伝達関数の絶対値は，

$$|H(\omega)| = |F(\omega)|$$

情報理論

情報理論ー情報を定量的に扱うことによって発展

情報量の定量化 $I(A_i) = \log_a \frac{1}{P(A_i)}$

事象Aiが起こる確率

事象Aの生起確率が小さいほど，情報量は大きい

（対数の底a=2だと，ビット）

独立な情報の加法性も満たす

$$\boxed{I(A_i \cap B_i) = \log_a} \frac{1}{P(A_i \cap B_i)} = \log_a \frac{1}{P(A_i)P(B_i)} = \log_a \frac{1}{P(A_i)} + \log_a \frac{1}{P(B_i)}$$

$$\boxed{= I(A_i) + I(B_i)}$$

エントロピー

情報：複数の事象の集合として成り立っている
⇒全体の情報を情報量の平均で表す

平均情報量： 個々の情報量と生起確率の和

$$H(A) = P(A_1)I(A_1) + \cdots + P(A_n)I(A_n) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\log P(A_i)$$

エントロピー

例

	エントロピー
A君の交通手段の確率： 徒歩-1/4, 電車- 1/4, 自転車- 1/2 →	1.5ビット
B君の交通手段の確率： 徒歩-1/32, 電車- 1/16, 自転車- 29/32 →	0.445ビット

H(B)はH(A)よりもエントロピーが低い⇒Bは手段選択が単調
Aは変化が目まぐるしい（情報量高い）

時間と送り手の追加

事象とその確率による情報量 ▶ 送り手(情報源)による発信と伝達
情報源の時間変化

$$
\text{情報源}A_t = \begin{pmatrix} A_{1,t} & A_{2,t} & \cdots & A_{n,t} \\ P(A_{1,t}) & P(A_{2,t}) & \cdots & P(A_{n,t}) \end{pmatrix}
$$

定常情報源:時刻tによらず，情報源の確率が不変
（エントロピー一定）
非定常情報源: 時刻tによって確率が変化

マルコフ情報源

英文アルファベットの生起確率

文　字	生起確率	文　字	生起確率	文　字	生起確率
space	0.1817	*h*	0.04305	*p*	0.01623
e	0.1073	*d*	0.03100	*w*	0.01260
t	0.0856	*l*	0.02775	*b*	0.01179
a	0.0668	*f*	0.02395	*v*	0.00752
o	0.0654	*c*	0.02260	*k*	0.00344
n	0.0581	*m*	0.02075	*x*	0.00136
r	0.0559	*u*	0.02010	*j*	0.00108
i	0.0519	*g*	0.01633	*q*	0.00099
s	0.0499	*y*	0.01623	*z*	0.00063

生起確率にしたがって，文字を選んでも文章にはならない

前の文字との関係がある
（t → h, h → eなど）

それ以前の時刻の事象に依存する情報源をマルコフ情報源という

情報伝送速度

情報源から発せされる情報は速やかに送られるのか

$$\text{情報伝送速度R} = \frac{\text{情報源エントロピーH}}{\text{伝送平均時間T}} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\log P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)T_i}$$

Ti : 事象Aiの時間の長さ

例

情報A1，A2
T1=1[ms], T2=4[ms]
Case X: P(A1)=3/4, P(A2)=1/4
Case Y: P(A1)=2/4, P(A2)=2/4

$$R_X = \frac{-\frac{3}{4}\log(\frac{3}{4}) - \frac{1}{4}\log(\frac{1}{4})}{(\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 4)\times 10^{-3}} = 464[bit/s]$$

$$R_Y = \frac{-\frac{2}{4}\log(\frac{2}{4}) - \frac{2}{4}\log(\frac{2}{4})}{(\frac{2}{4}\cdot 1 + \frac{2}{4}\cdot 4)\times 10^{-3}} = 400[bit/s]$$

Yはエントロピーは高いが伝送速度は遅い
受け取る側の情報エントロピーは小さい

通信路容量

通信路容量 $C = \max_{P(A_i)} R$

受けとる側の情報を最大にする
情報エントロピーと伝送時間の関係

目的関数 $\log R = \log H - \log T$ 　制約条件 $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

ラグランジェの未定乗数法

$$f = \log R - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - 1\right) = \log H - \log T - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - 1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial P_i} = \frac{-1 - \log P_i}{H_0} - \frac{T_i}{T_0} + \lambda = 0$$

最大のときの解H0, T0

両辺にP0をかけて, i=1~nまでの和を連立

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overset{1}{\boxed{-P_i}} - \overset{H_0}{\boxed{P_i \log P_i}}}{H_0} - \frac{\overset{T_0}{\boxed{P_i T_i}}}{T_0} + \overset{1}{\boxed{P_i}}\lambda\right) = 0$$

$$\frac{-1 + H_0}{H_0} - \frac{T_0}{T_0} + \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{H_0}, \quad P_i(T_i) = 2^{-\frac{H_0}{T_0}T_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\overset{C}{\boxed{\frac{H_0}{T_0}}}T_i} = 1$$

BehaviorInNetworks
都市生活行動学研究室

終わり