理論勉強会
第4回
行動モデル編
MNP・MXL
モデル

2014/6/19　社会基盤M1　笠原　和

Introduction

- ◆ MNP(多項プロビットモデル)
- ◆ MXL(ミックストロジットモデル)

<u>選択肢</u>

- 連続量...同質の財・サービスの量を説明
  (ex：電話通話時間,自動車の走行距離)
- 離散量...複数の選択肢から単一の選択肢を選択する
  (ex：経路選択，交通手段選択)

<u>離散型選択モデル．．.効用最大化理論</u>

◆ ロジットモデル　...誤差項がガンベル分布に従うと仮定

計算が楽 ↔ 非現実的な結果を表現してしまうという欠点

◆ プロビットモデル　...誤差項が正規分布に従うと仮定

計算負荷が大きい ↔ ロジットモデルの欠点をカバー

Introduction

モデルの発展の経緯

- ◆ 計算機能力の向上にともなうシミュレーション法によるモデル推定の一般化
- ◆ IIA特性を緩和したい→選択肢間の相関をなんとか表現したい

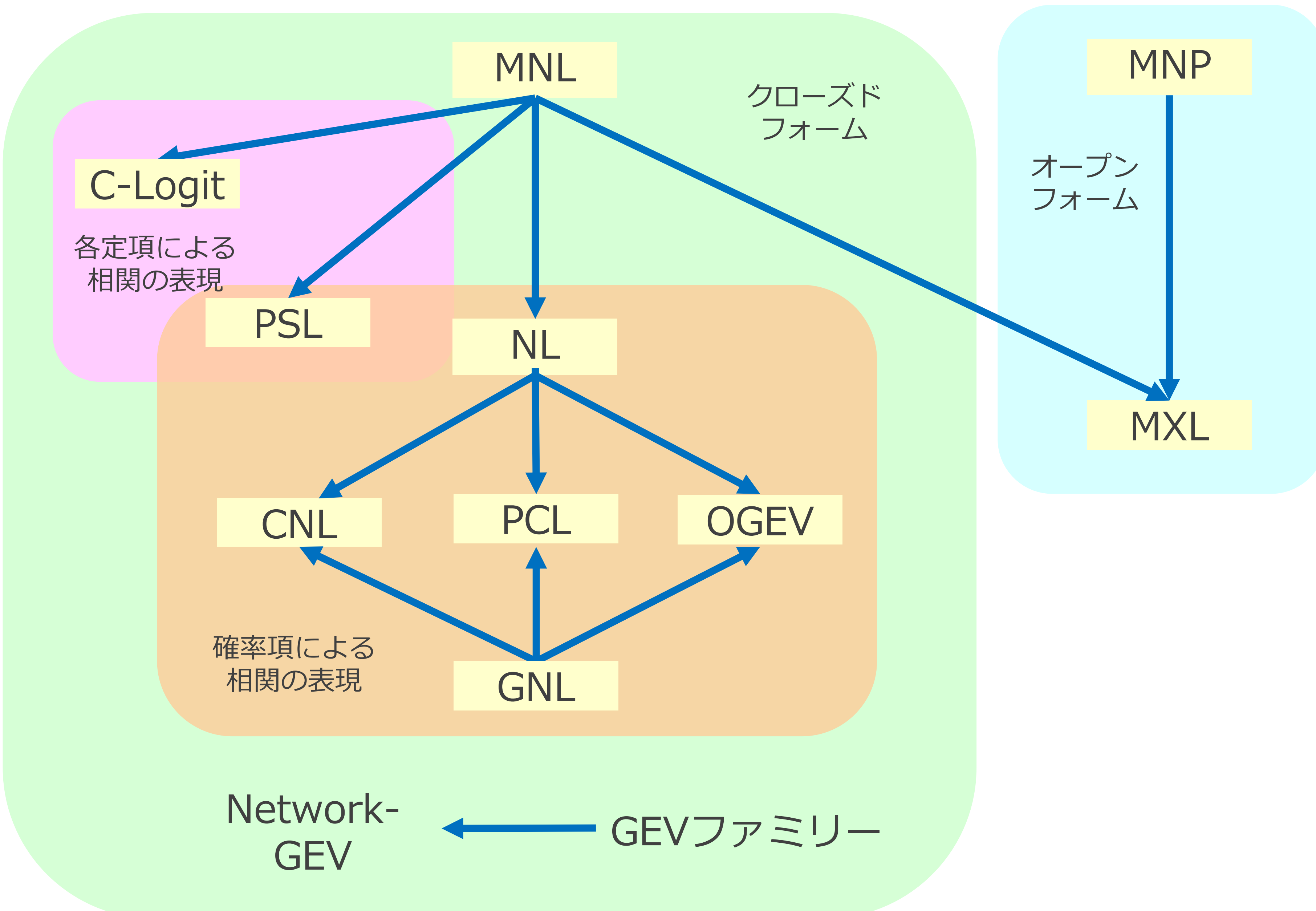
↓

選択確率の比は，その選択肢の効用の確定項のみで決まる．一方で，各選択肢の確率的効用の間に相関がある場合には，非現実的な選択率を与える

一部の選択肢間の誤差項に相関が生じやすい例

・交通手段選択(赤バス、青バス)
・経路選択(一部のリンクを共有している経路間には相関が生じやすい)
・目的地選択（近い目的地同士には相関が生じやすい）

モデルの関係図


MNL
クローズド
フォーム
C-Logit
各定項による
相関の表現
PSL
NL
CNL
PCL
OGEV
確率項による
相関の表現
GNL
Network-
GEV
GEVファミリー
MNP
オープン
フォーム
MXL

モデルの誤差項の表現

それぞれのモデルで誤差項をどのように表現しているかを理解することが重要

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$

εの分布系

ε～IIDガンベル分布 → MNL
ε～一般化極値(GEV)分布 → GEV(NL,PCL,CNL,GNL等)
ε～多変量正規分布 → MNP
ε～GEVと正規分布などの合成分布 → MXL

MNPモデル

◆ εは互いに分散が異なり，誤差項の相関が表現可能であるモデル

効用関数 $U_{in} = V_{in} + \varepsilon_{in} \quad ,i = 1, \ldots, J$

確定的効用項

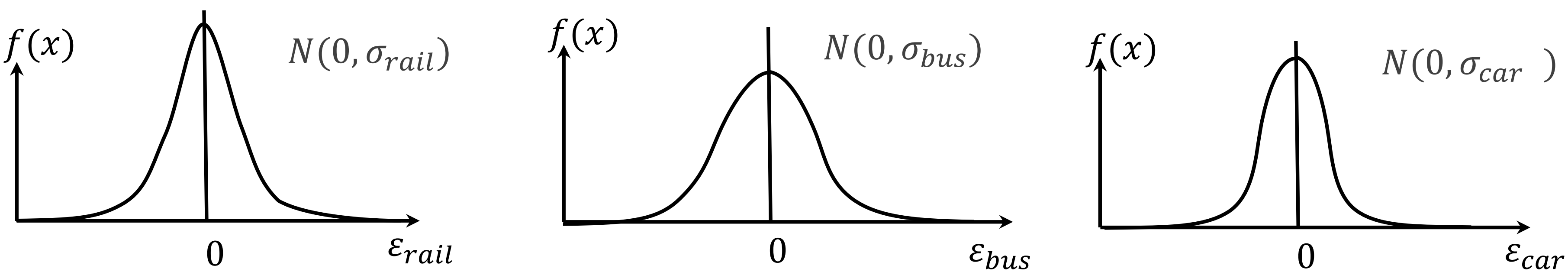
確率効用項 $\varepsilon_{in} = \left(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots, \varepsilon_{jn}\right)'$

◆ 確率効用項が平均値０，分散共分散行列Σの多変量正規分布に従う．

$$\boxed{\begin{aligned} U(rail) &= \underbrace{\beta X_{rail}}_{\text{確定項}V} + \underbrace{\varepsilon_{rail}}_{\text{誤差項}\varepsilon} \\ U(bus) &= \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus} \\ U(car) &= \beta X_{car} + \varepsilon_{car} \end{aligned}}$$

MNPモデル

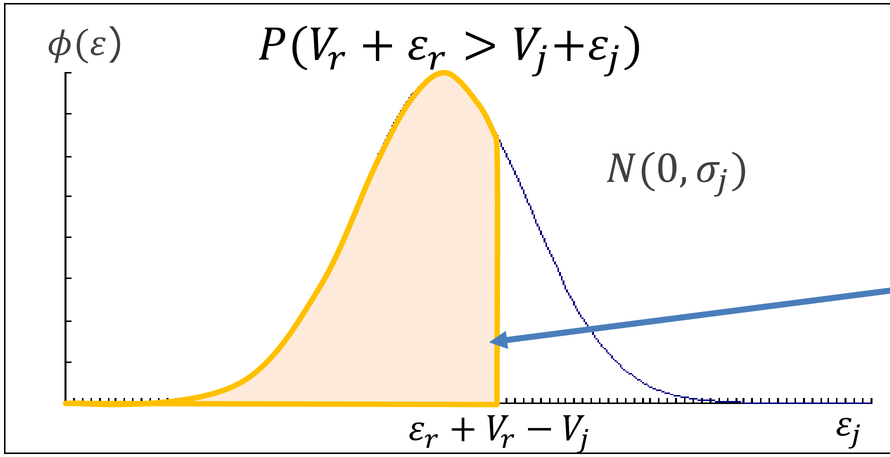
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{access} + \varepsilon_{rail,other}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{delay} + \varepsilon_{access} + \varepsilon_{bus,other}$$
$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{delay} + \varepsilon_{car,other}$$



$$\Sigma = Cov(U) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{車} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{車} \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma_{rail}^2 & \sigma_{rail,bus} & \sigma_{rail,car} \\ \sigma_{rail,bus} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus,car} \\ \sigma_{rail,car} & \sigma_{bus,car} & \sigma_{car}^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

相関を自由に設定出来る

MNPモデル



確率密度関数

$$\phi(\varepsilon)=(2\pi)^{-\frac{J}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\sum^{-1}\varepsilon^T\right)$$

↑
分散共分散行列

J次元の多変量正規分布に従い，選択肢rを選んだときの効用が最大となる確率

$$\Pr(\varepsilon_r)=\int_{\varepsilon 1=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_1}\dots\int_{\varepsilon J=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_J}\phi(\varepsilon)d\varepsilon_J\dots d\varepsilon_1\ (\forall j\neq r)$$

$$\Pr=\int_{\varepsilon_r=-\infty}^{\infty}\Pr(\varepsilon_r)d\varepsilon_r$$

さらに，J個の選択肢から選択肢rを選ぶ確率は

$$\Pr=\int_{\varepsilon 1=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_1}\dots\int_{\varepsilon_r=-\infty}^{\infty}\dots\int_{\varepsilon J=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_J}\phi(\varepsilon)d\varepsilon_J\dots d\varepsilon_1$$

→導出された選択確率を用いて最尤推定法でパラメータ推定

MXLモデル (logit kernel)

◆ MNLの操作性とMNPの誤差構造を兼ね備えたモデル

効用関数

$$U_{in} = V_{in} + \varepsilon_{in} \quad , i = 1, \ldots, J$$

確定的効用項

確率効用項

$$\varepsilon_{in} = \eta_{in} + \nu_{in}$$

共分散行列Σを持つ多変量正規分布に従う誤差項
→選択肢固有の誤差項

IIDガンベル分布に従う誤差項
→全選択肢に含まれる誤差項

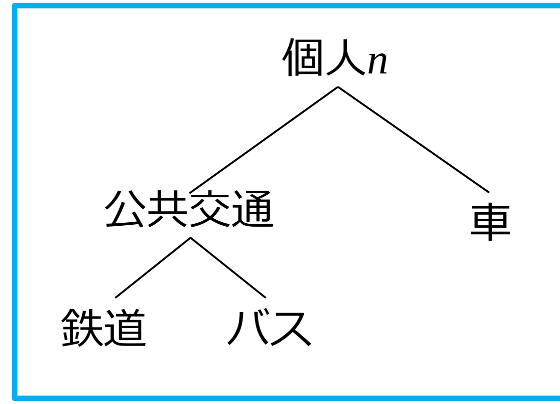
$$U(rail) = \underbrace{\beta X_{rail}}_{確定項V} + \underbrace{\eta_{rail} + \nu_{rail}}_{誤差項\varepsilon}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U(car) = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$

MXLモデル (logit kernel)

Nestedの表現も可能

$\eta_{transit} \sim N(0,1)$

$$U(rail) = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\,\eta_{transit} + v_{rail}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\,\eta_{transit} + v_{bus}$$
$$U(car) = \beta X_{car} + v_{car}$$



$$\Sigma = Cov(U) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{車} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{車} \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} & 0 \\ \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{車} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varepsilon \quad = \quad \eta \quad + \quad \nu$$

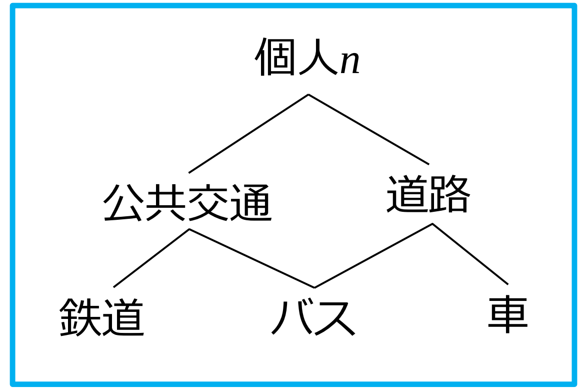
誤差項毎の相関を表現できている→NLより現実的

MXLモデル (logit kernel)

Cross-Nestedの表現も可能

$$U(rail) = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{bus}$$
$$U(car) = \beta X_{car} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{car}$$

$\eta_{transit}, \eta_{road} \sim N(0,1)$



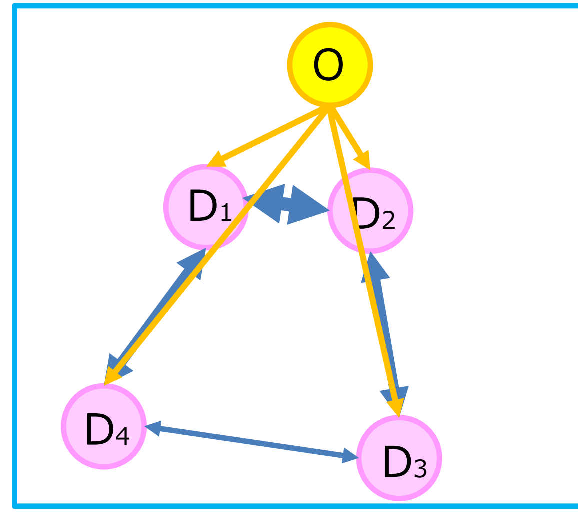
$$\Sigma = Cov(U) = \begin{array}{c|ccc} & 鉄道 & バス & 車 \\ \hline 鉄道 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} & 0 \\ バス & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} \\ 車 & 0 & \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} \end{array} + \begin{array}{ccc} 鉄道 & バス & 車 \\ \hline \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{array}$$

$$\varepsilon = \eta + \nu$$

MXLモデル (logit kernel)

空間的相関も表現も可能

$$U(D_1) = \beta X_{D_1} + \sigma_{1,2}\,\eta_2 + \sigma_{3,4}\,\eta_4 + v_{D_1}$$
$$U(D_2) = \beta X_{D_2} + \sigma_{1,2}\,\eta_1 + \sigma_{2,3}\,\eta_3 + v_{D_2}$$
$$U(D_3) = \beta X_{D_3} + \sigma_{2,3}\,\eta_2 + \sigma_{3,4}\,\eta_4 + v_{D_3}$$
$$U(D_4) = \beta X_{D_4} + \sigma_{1,4}\,\eta_1 + \sigma_{3,4}\,\eta_3 + v_{D_3}$$



相関係数高い

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \sim N(0,1)$$

$$\sum = Cov\,(U) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & 0 & \sigma_{1,4} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,3} & \sigma_3^2 & \sigma_{3,4} \\ \sigma_{1,4} & 0 & \sigma_{3,4} & \sigma_4^2 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varepsilon \quad = \quad \eta \quad + \quad \nu$$

対角成分は選択肢間の分散

MXLモデル (logit kernel)

効用関数と確率密度に従うη_{in}の値が与えられたとき，
個人nが選択肢iを選択する条件付き確率は，

$$P_{in}(\eta_{in}) \frac{\exp(V_{in} + \eta_{in})}{\sum_j \exp(V_{jn} + \eta_{jn})}$$

η_{in}は確率分布であるため，分散共分散行列$\sum$に従う
確率密度関数$f(\eta_{in}|\sum)$を用いて選択確率はP_{in}は，

$$P_{in} = \int P_{in}(\eta_{in}) f(\eta_{in}|\Omega)\ \mathrm{d}\eta_{in}$$

$$= \int \frac{\exp(V_{in} + \eta_{in})}{\sum_j \exp(V_{jn} + \eta_{jn})}\ f(\eta_{in}|\Omega)\ \mathrm{d}\eta_{in}$$

MXLモデル (logit kernel)

◆ MXLモデルは誤差項に確率密度関数が含まれているため解析的計算が不可能

→モンテカルロ法などシミュレーションアプローチによる選択確率の計算が必要

モンテカルロ法で用いる乱数発生方法の例

①ランダムドロー法

②ハルトン数列法

$$\ln \mathrm{SL} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{J}\delta_{in}\, lnP_{in}$$

$\delta_{in} = 1\ if\ n\ chose\ i\ and\ zero\ otherwise$

R：繰り返し計算の回数

算出された選択確率の推定値を尤度として最尤推定法によりパラメータを求める

summary

MNPモデル

- 分散共分散行列Ωの構造に何らかの制約を設けない限り，選択肢間の誤差項の相関や異分散性を自由に表現できる.
- IIA特性を持たずパラメータ推定が困難であり，(3~4個ならok) あまり用いられなかったが，近年のシミュレーション法の発達に伴い，パラメータ推定の困難性が克服されつつある
- 全ての共分散が 0 (互いに独立)ならMNLと等しい

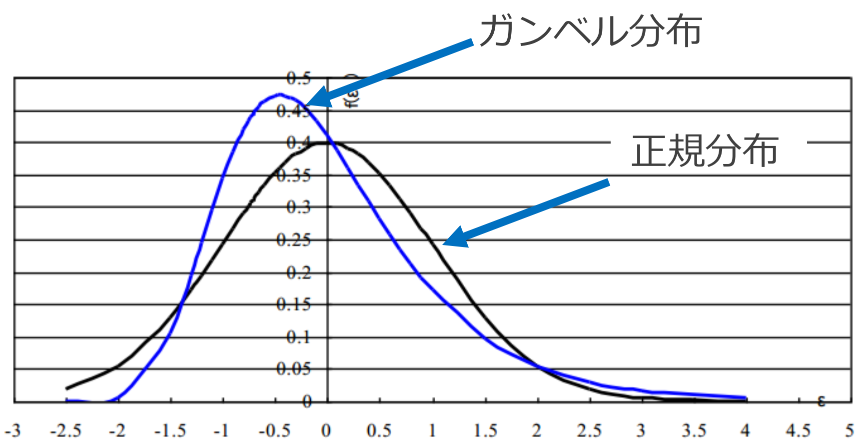
MXLモデル (logit kernel)

- MNLモデルの誤差項を操作することにより，変数の系列相関や分散を表現できるように拡張した.
- ηの与え方よりあらゆるRUM(Random Utility Maximization) モデルに近似可能

・共分散が0だとロジットになるというのは・・・

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{\ 2} & \sigma_{1,2}^{\ 2} & \sigma_{1,3}^{\ 2} \\ \sigma_{2,1}^{\ 2} & \sigma_2^{\ 2} & \sigma_{2,3}^{\ 2} \\ \sigma_{3,1}^{\ 2} & \sigma_{3,2}^{\ 2} & \sigma_3^{\ 2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{0になると…}} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Probitの分散共分散行列　　　　ガンベル分布の分散行列



ガンベル分布と正規分布の密度関数の形状は似ていることから，近似して等しいと言うことが出来る