確率過程の基礎

-マルコフ連鎖-

2016/4/25

スタートアップゼミ

社会基盤学科　交通研　B4　前田翠

目次

- マルコフ連鎖とは
- 遷移確率
- 状態の分類
- 遷移確率の極限の挙動
- まとめ
- 特殊な例（別途参考資料）
- 無限状態空間（別途参考資料）

マルコフ連鎖とは

＜本章での目的＞

・マルコフ性について説明

・マルコフ連鎖が起きる場合に現れる特徴を例を用いて確認

マルコフ連鎖とは

- マルコフ性

  現在の状態X_nが与えられた時、過去のいかなる情報$(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$も、$X_{n+1}$を予測する際には無関係であるという性質

マルコフ連鎖とは-マルコフ性の式-

「X_nが遷移確率行列$p(i,j)$を持つ離散時間のマルコフ連鎖である」とは

任意の状態$i, j, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_0$が与えられたとき、

$$\underbrace{P(X_{n+1} = j}_{\text{こうなる確率が}} \mid \underbrace{\mathrm{X}_n = i, \mathrm{X}_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \mathrm{X}_0 = i_0}_{\text{この条件のもとで}}) = p(i,j)$$

i, jの状態にのみ依存
→つまり直前の動作
にのみ影響される

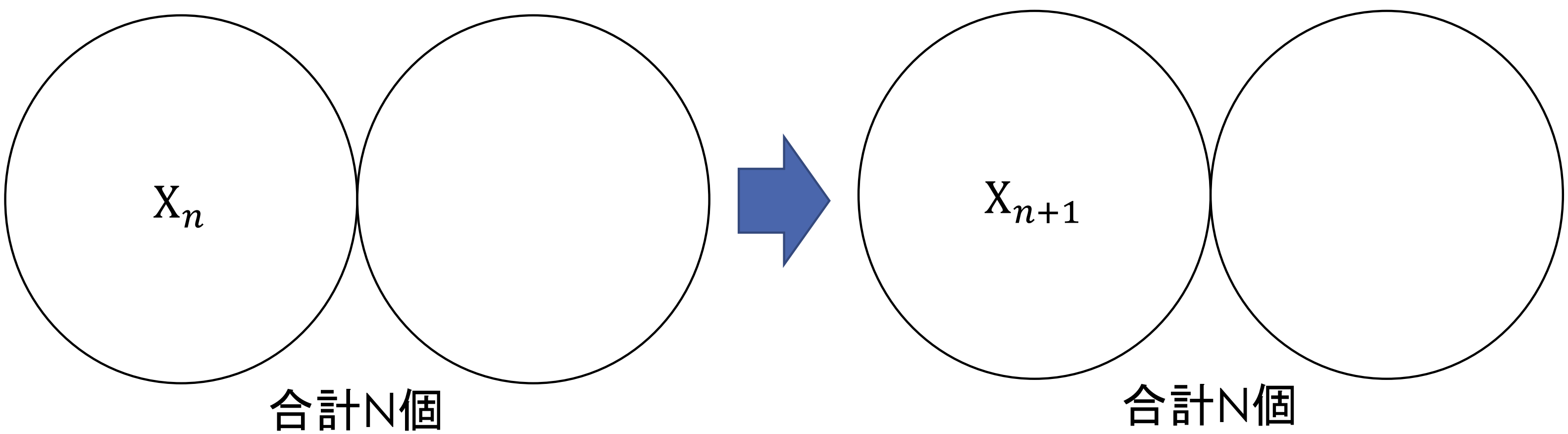
$$P(X_{n+1} = j \mid \mathrm{X}_n = i) = p(i,j)$$

マルコフ連鎖とは-例１-

○ 例１ エーレンフェンスト連鎖

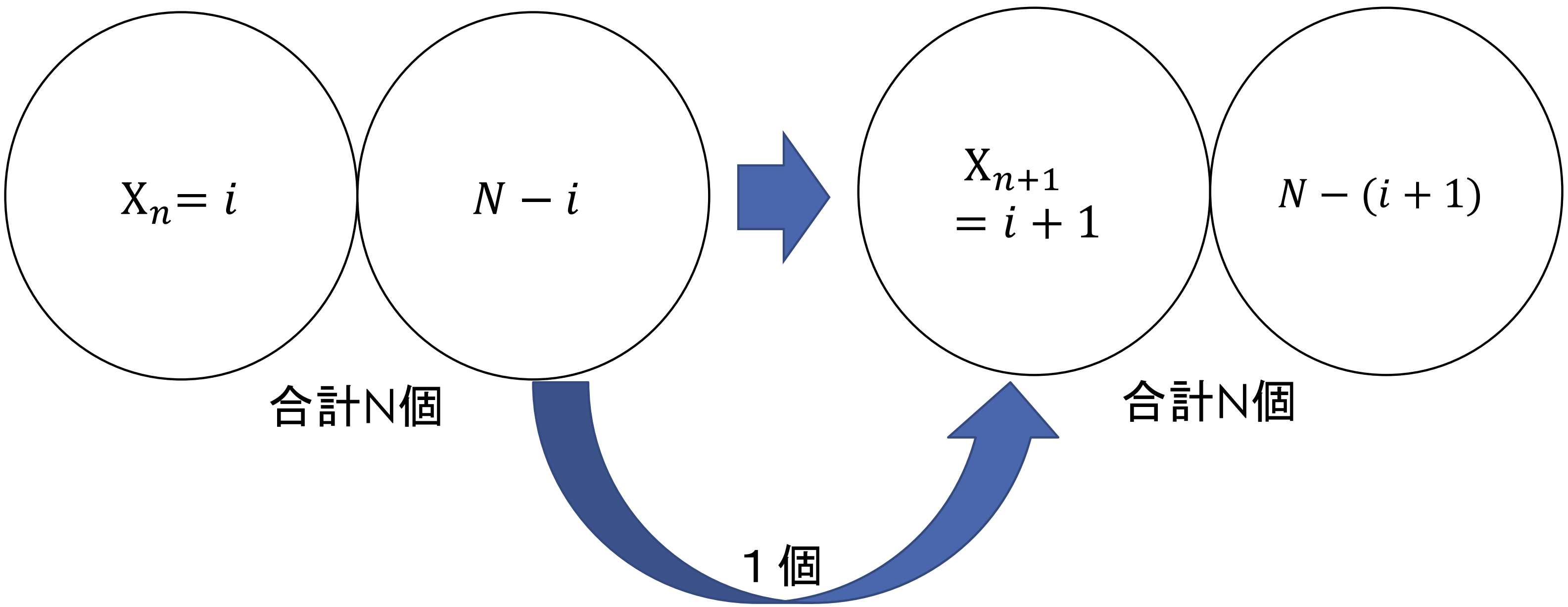
合計N個のボールが入っている２つの壷がある.他方の壷から１つのボールをランダムに取り出してもう片方の壷に入れる.

X_n ： n 回の動作を行った後の左の壷の中のボールの個数



マルコフ連鎖とは-例 1 -

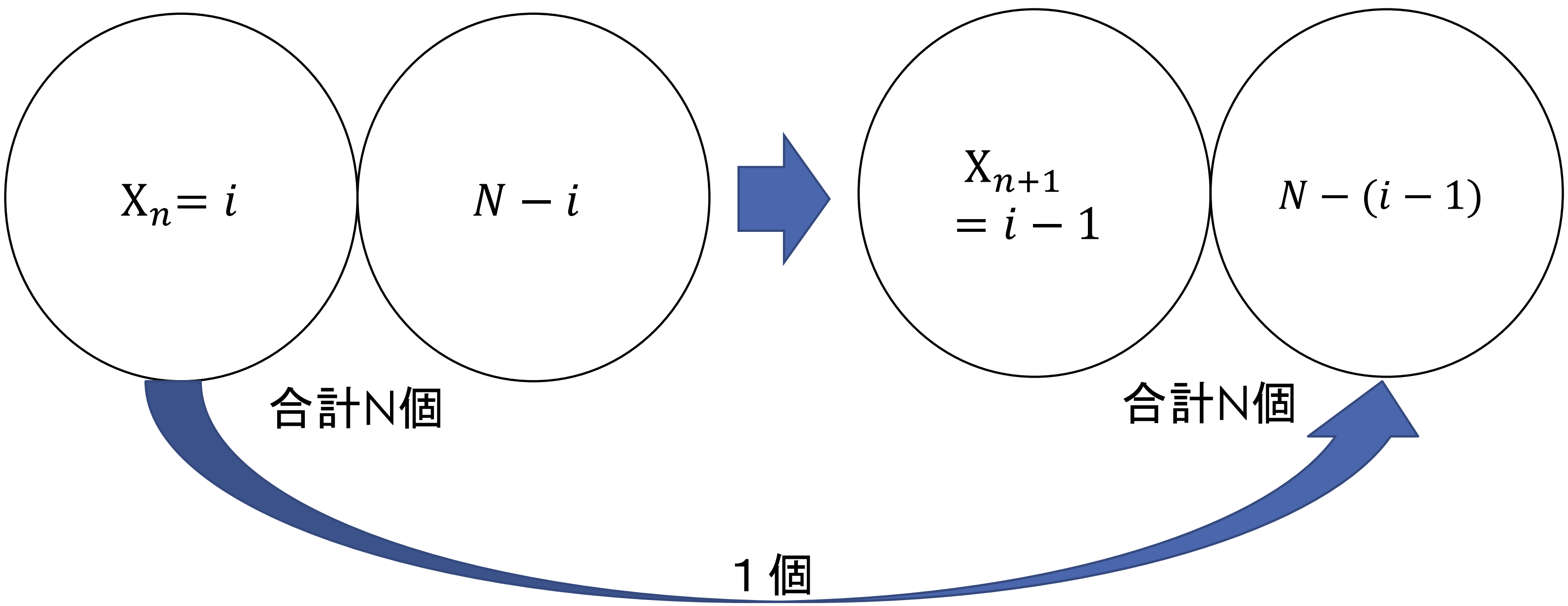
(1) $\boldsymbol{X_n = i}$, $\boldsymbol{X_{n+1} = i + 1}$**となる場合**($\boldsymbol{0 \le i \le N}$)



$$P(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i) = p(i, i + 1) = \boldsymbol{\frac{N - i}{N}}$$

マルコフ連鎖とは-例１-

(2) $\boldsymbol{X_n = i}$, $\boldsymbol{X_{n+1} = i-1}$**となる場合**$(\boldsymbol{0 \le i \le N})$



$$P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = p(i, i-1) = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}}$$

マルコフ連鎖とは-例１-

N=5として実際に遷移確率行列を求めてみよう！

$$p(i, i+1) = \frac{\boldsymbol{N-i}}{\boldsymbol{N}}, \; p(i, i-1) = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}}$$

それ以外のとき $p(i,j) = 0$ （$0 \leq i,j \leq N$）

j

i	0	1	2	3	4	5
0	0	5/5	0	0	0	0
1	1/5	0	4/5	0	0	0
2	0	2/5	0	3/5	0	0
3	0	0	3/5	0	2/5	0
4	0	0	0	4/5	0	1/5
5	0	0	0	0	5/5	0

③
各要素は０以上
（確率なので）

②
各行の要素の合計は１
ある状態から変化する
可能性のある場合全て
考えたので当たり前

①
操作前の状態が
左の箱に4個(i=4)
操作後の状態が
左の箱に5個(i=5)
になる遷移確率

マルコフ連鎖とは-吸収状態-

- 吸収状態

  状態yが吸収状態にあるとは下の式が成り立つこと

$$p(y, y) = 1$$

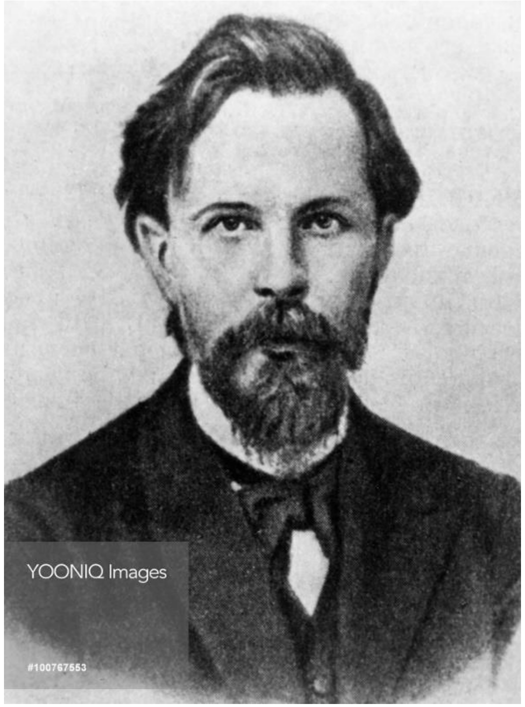
→ある状態yに達するとその後状態yになる確率が１

→状態yに留まり続ける

遷移確率

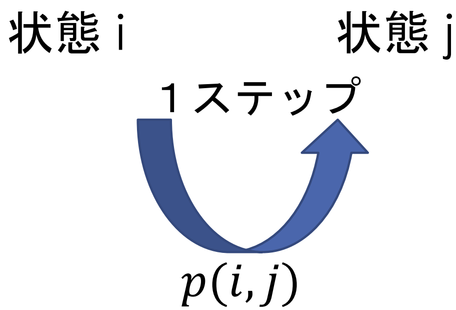
＜本章での目的＞

- 遷移確率にまつわる数式の紹介
- 実際に例を用いて遷移確率を計算
- 遷移確率の持つ性質を確認

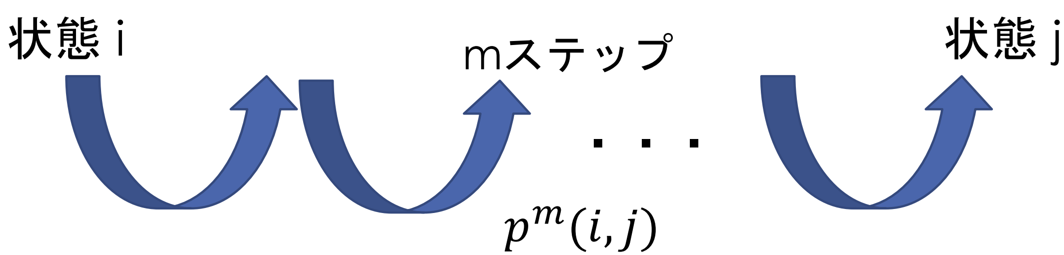


遷移確率

- 前章



- 本章



iからmステップでjに遷移する確率

$$p^m(i,j) = P(X_{n+m} = j \mid \mathrm{X}_n = i)$$

遷移確率-例 2-

○ 例２ 天気の遷移確率

（少し無理があるが）天気をマルコフ連鎖と仮定.

1.雪　2.くもり　3.晴れ　とする.

火曜日がくもりで木曜日が雪になる確率を求めよ.

遷移確率行列は以下の通りである.

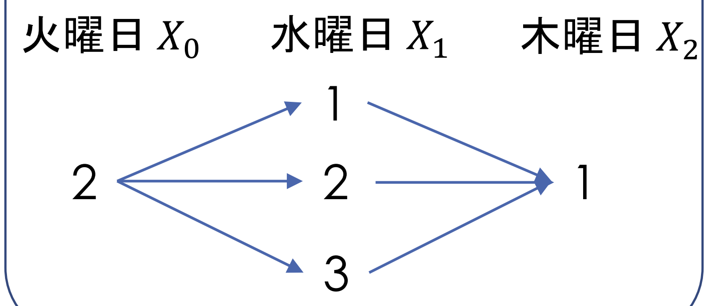
	1	**2**	**3**
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

遷移確率-例 2-

$$P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) * P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$$
$$+ P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2) * P(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)$$
$$+ P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) * P(X_2 = 1 \mid X_1 = 3)$$
$$= p(2,1)p(1,1) + p(2,2)p(2,1) + p(2,3)p(3,1)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} p(2,k)p(k,1) \cdots (\bigstar)$$
$$= 0.21$$

	1	**2**	**3**
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

1. 雪　2. くもり　3. 晴れ　とする.
火曜日がくもりで木曜日が雪になる確率を求めよ.
遷移確率行列は以下の通りである.



遷移確率-定理１-

（★）からも分かるように、

２ステップの遷移確率p^2は単に遷移行列pの２乗で表される

○ 定理１

mステップでjにマルコフ遷移する確率

$$p^m(i,j) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

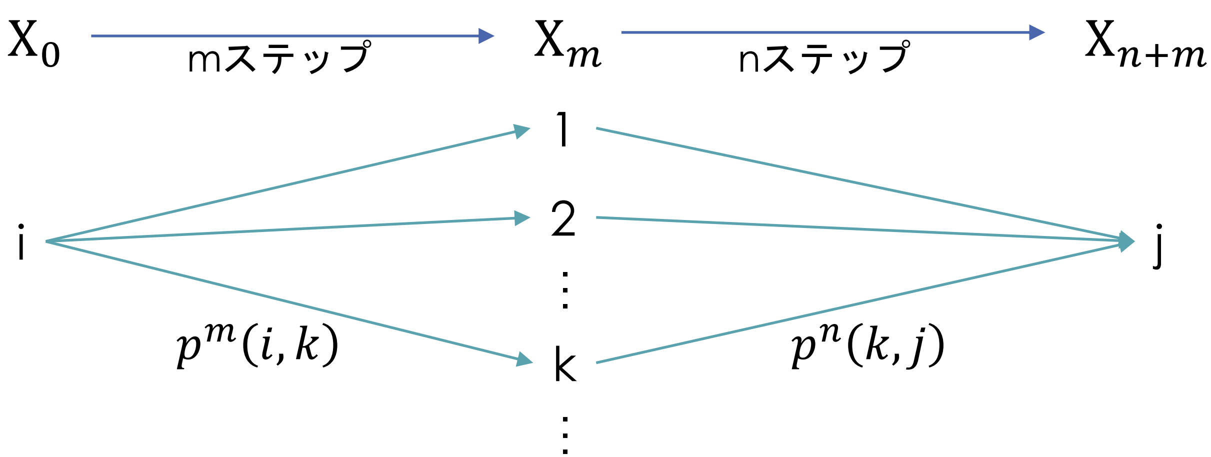
は遷移確率行列pのm乗で表される

遷移確率-チャップマン-コルモゴロフ方程式-

- チャップマン-コルモゴロフ方程式

$$\underline{p^{m+n}(i,j)} = \sum_k p^m(i,k)p^n(k,j)$$

ある時点で状態 i で
その m+n ステップ後に
状態 j になる確率



遷移確率-例３-

○ 例３　チャップマン-コルモゴロフ方程式を実感しよう

例２と同様、1.雪　2.くもり　3.晴れ　とする.

金曜日が雪で日曜日が晴れになる確率をチャップマン-コルモゴロフ方程式を用いて求めよ.

遷移確率行列は以下の通りである.

	1	**2**	**3**
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

遷移確率-例３-

1.雪　2.くもり　3.晴れ　とする.

金曜日が雪で日曜日が晴れになる確率をチャップマン-コルモゴロフ方程式を用いて求めよ.

遷移確率行列は以下の通りである.

→2ステップで1から3へ遷移するときの遷移確率行列を求める

チャップマン-コルモゴロフ方程式

$$p^{m+n}(i,j) = \sum_k p^m(i,k)p^n(k,j)$$

→m+n=2, m=1, n=1, i=1, j=3

遷移確率-例3-

$$p^2(1,3) = \sum_{k=1}^{3} p(1,k)p(k,3)$$

細かく計算してもいいが、遷移確率行列との対応を考えると…

$$\begin{array}{cc} & k \\ i & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & j \\ k & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0.28 & 0.54 & \boxed{0.18} \\ 0.21 & 0.58 & 0.21 \\ 0.20 & 0.55 & 0.25 \end{pmatrix} \end{array} = p^2\ (1,3)$$

i→kの遷移　　k→jの遷移　　i→jの遷移

遷移確率-例３おまけ-

p^4やp^8を計算してみると…

$$p^4 = p^2 \cdot p^2 = \begin{pmatrix} 0.2278 & 0.5634 & 0.2088 \\ 0.2226 & 0.5653 & 0.2121 \\ 0.2215 & 0.5645 & 0.2140 \end{pmatrix},$$

$$p^8 = p^4 \cdot p^4 = \begin{pmatrix} 0.22355 & 0.56470 & 0.21175 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \end{pmatrix}.$$

⇨ なんか一定値に収束していそうだが…（真相は後ほど）

状態の分類

＜本章での目的＞

・重要な用語の定義の説明

・重要な定理の紹介

А. А. Марков (1886).

状態の分類-停止時刻-

- 停止時刻

状態yを出発して、次に状態yに初めて戻る時刻

が確率過程 $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ のみによって決まるとき、

$$T_y = \min\{n \geq 1, \mathrm{X}_n = y\}$$

を停止時刻と呼ぶ.

故に、 yから出発して初めてyに戻る時刻が有限

である確率は以下のように表せる.

$$g_y = P\left(T_y < \infty \,\middle|\, \mathrm{X}_n = y\right)$$

状態の分類-強マルコフ性-

- 強マルコフ性

Tを停止時刻とする.

$T=\mathrm{n}$, $\mathrm{X}_T = y$ を与えたとき、$\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_T$ に関するいかなる情報も未来を予測することには無関係.

$\mathrm{X}_{T+k}\ (k \geq 0)$は初期状態$y$で始まるマルコフ連鎖と同様に振舞う.

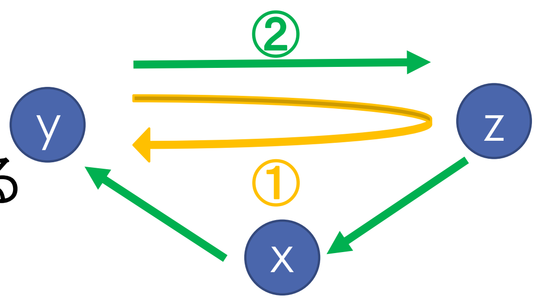
状態の分類-強マルコフ性の確認-

停止時刻

状態yを出発して、次に状態yに初めて戻る時刻

が確率過程$X_0, X_1, \ldots, X_n$のみによって決まるとき、

$$T_y = \min\{n \geq 1, X_n = y\}$$



y → z → y → z → x → y という変化をしたとする

これは① y → z → y　② y → z → x → y という

２つの別の変化が続けて起こったと考えることが可能

①と②の過程は完全に独立
②は新たにｙからスタートしたと考えても問題ない
→①の過程ではT_2, ②の過程ではT_3

状態の分類-再帰的/非再帰的-

○ 再帰的/非再帰的

yから出発して初めてyに戻る時刻が有限である確率は以下のように表せた.

$$g_y = P\left(T_y < \infty \,\middle|\, \mathrm{X}_n = y\right)$$

(i) $g_y < 1$ のとき**非再帰的**

yにｎ回戻ってくる確率g_y^nはｎ→∞のときg_y^n→0.

よってこの時マルコフ連鎖は無限回後の操作の後yに戻ってこない.このときyは非再帰的である.

(ii) $g_y = 1$ のとき**再帰的**

yにｎ回戻ってくる確率g_y^nはｎ→∞のときg_y^n=1.

よってこの時マルコフ連鎖はyに無限回戻ってくる.このときyは再帰的である.

状態の分類-コミュニケート-

- コミュニケート

  状態 xから 出発し、状態 y に到達する確率が正、すなわち$\rho_{xy} = P_x\left(T_y < \infty\right) > 0$であるとき$x$ はyにコミュニケートするといい、 $x \to y$と表す.

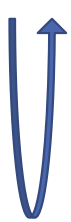
  ※ xから yへ 1ステップで到達する場合だけでなく、複数ステップを経て到達する場合も含む.

状態の分類-定理２-

※ xから yへ１ステップで到達する場合だけでなく、
複数ステップを経て到達する場合も含む.

○ 定理２

xがyにコミュニケートするが、yがxにコミュニケートしないようなyが存在するとき、xは非再帰的である



無限時間経ったとしてもxからyに
たどり着くことはない
→ 状態xから状態yに遷移した場合xは
無限時間後にxに戻ってこない
→ xは非再帰的

状態の分類-閉じている集合-

- 閉じている集合

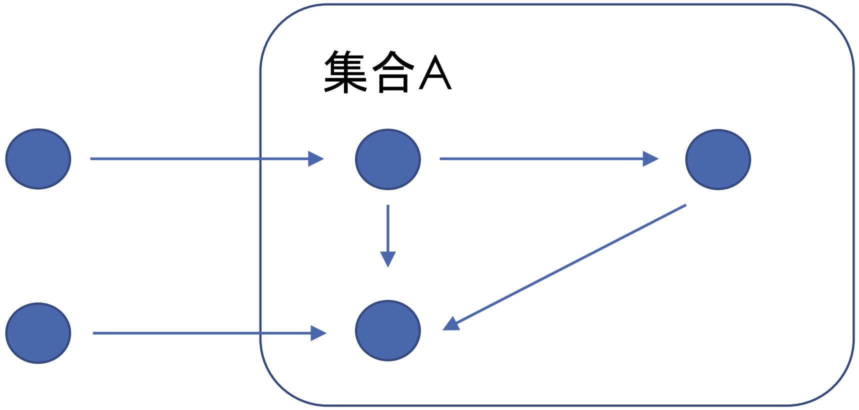
　ある集合Aから外にコミュニケートしないとき、

　つまり$\mathrm{i} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{j} \notin A$ならば$p(i,j) = 0$ を満たすとき

　集合Aは閉じているという

集合Aに一旦入ると出られない
＝閉じている集合

集合Aにはコミュニケートできるが
集合Aからはどの状態にもコミュニ
ケートすることができない



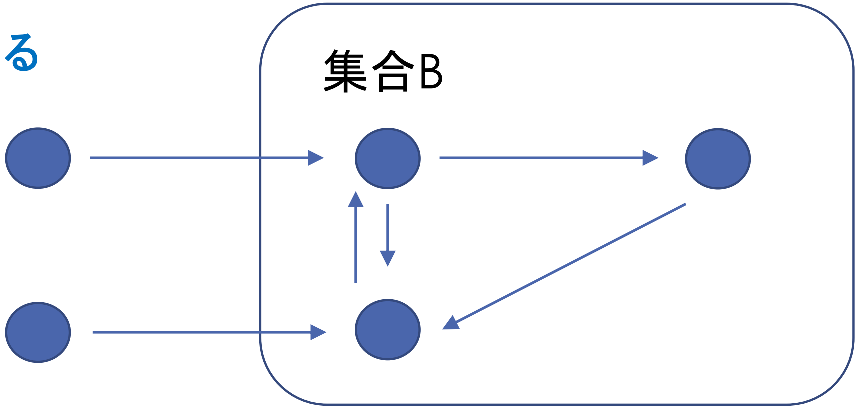
状態の分類-既約-

- 既約

  ある集合Bがすべての$i, j \in B$に対してiからjへコミュニケートするとき集合Bは既約であるという

少なくとも１個のループができている
＝既約

コミュニケートすればいいので、
直接/複数ステップでお互いに到達することができれば既約となる
（ちなみに集合Bは既約かつ閉じている）

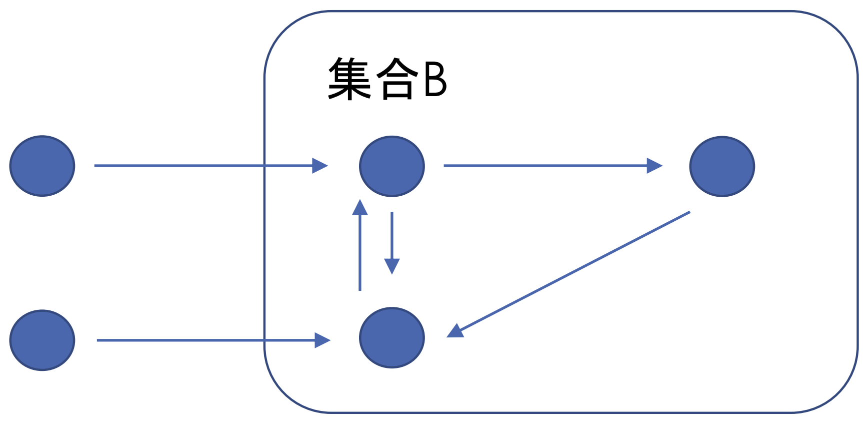


状態の分類-定理３-

○ 定理３

集合Cが有限で、既約かつ閉じた集合であれば
集合Cのすべての状態は再帰的である

先ほどみた集合Bは既約かつ閉じた集合であり、集合B内の要素はすべて再帰的であると確認できる



状態の分類-おまけ-

- 補題

有限で閉じた集合では少なくとも１つの再帰的状態が存在する

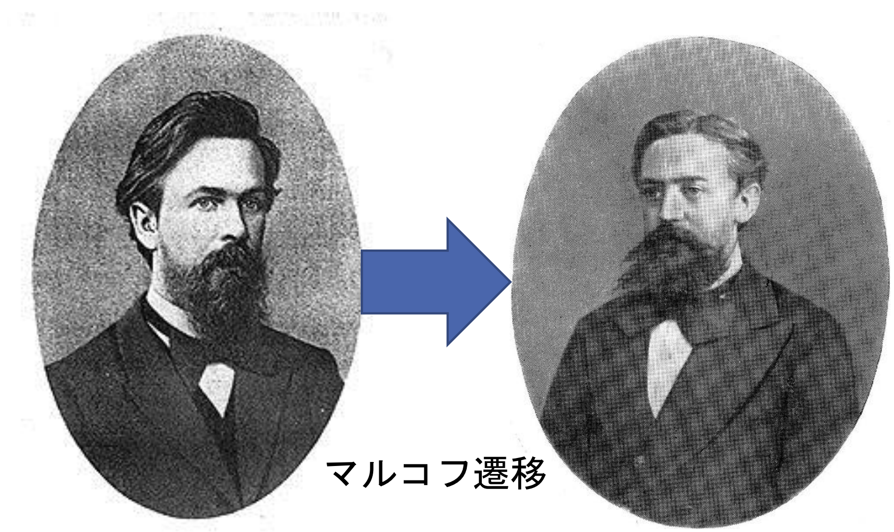
集合が閉じていることから、マルコフ連鎖は集合内に無限時間滞在する
→必ずループが存在するか(=既約+有限で閉じた集合)
　吸収状態(強い再帰状態)が存在しているはず

⇒ 少なくとも１つの再帰的状態が存在

遷移確率の極限の挙動

＜本章での目的＞

- 遷移確率の極限パターン整理
- 遷移確率の極限値を計算



А. А. Марков (1886).

遷移確率の極限の挙動-n次遷移確率行列-

- 有限マルコフ連鎖において$p^n(x,y)(n \to \infty)$の挙動

(i)状態yが非再帰的である場合

$$p^n(x,y) = P(X_n = y) \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

→非再帰的の定義を確認
ｙが有限時間内にｎ回ｙに戻ってくる確率が1より小さいのだから
０に収束するのは納得できる

(ii)状態yが再帰的である場合（本章で解説）

①$p^n(x,y)(n \to \infty)$は収束しない

②$p^n(x,y)(n \to \infty)$は正の値に収束

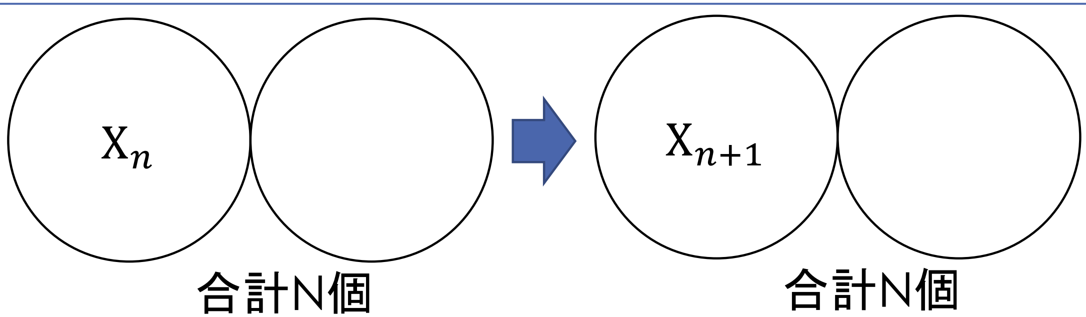
遷移確率の極限の挙動①-例４-

①$p^n(x,y)$が収束しない場合について考える

○ 例４ エーレンフェスト連鎖

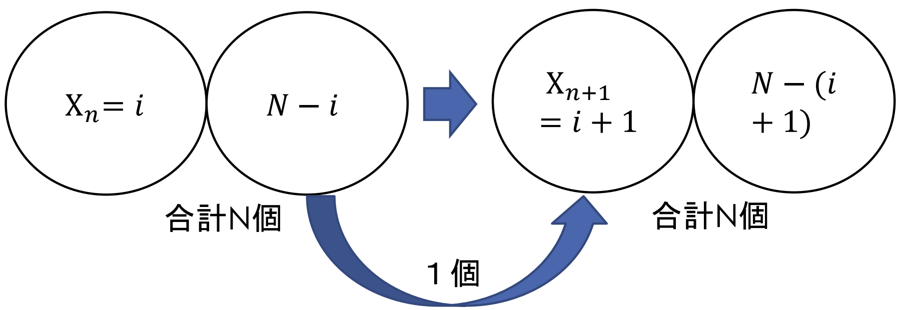
例１と同様、合計N個のボールが入っている２つの壺がある.
他方の壺から１つのボールをランダムに取り出してもう片方の壺に入れる.ただしN=３とする.

X_n ： ｎ回の動作を行った後の左の壺の中のボールの個数



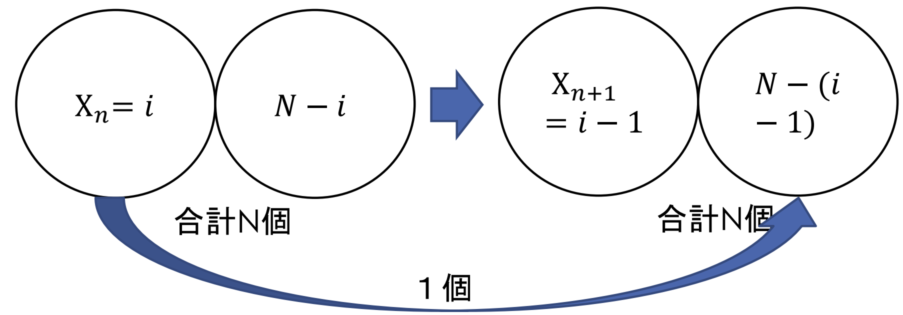
遷移確率の極限の挙動①-例４-

(1) $\boldsymbol{X_n = i\,,\, X_{n+1} = i+1}$ となる場合 $(\boldsymbol{0 \le i \le N})$



$$P(X_{n+1} = i + 1 \mid \mathrm{X}_n = i) = p(i, i + 1) = \frac{\boldsymbol{N - i}}{\boldsymbol{N}}$$

(2) $\boldsymbol{X_n = i\,,\, X_{n+1} = i-1}$ となる場合 $(\boldsymbol{0 \le i \le N})$



$$P(X_{n+1} = i - 1 \mid \mathrm{X}_n = i) = p(i, i - 1) = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{N}}$$

（例１より）

遷移確率行列をN=3として求めると以下のようになる

$$p = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & 3/3 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 3/3 & 0 \end{array}$$

$$p^2 = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{0} & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ \mathbf{2} & 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{array}$$

遷移確率の極限の挙動①-例４-

$$
p = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & 3/3 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 3/3 & 0 \end{array}
\qquad
p^2 = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{0} & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ \mathbf{2} & 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{array}
$$

この部分以外、０→数字/数字→０に

なぜこうなるのか？

左の壷に入っている個数の偶奇に注目すると

（偶）→（奇）→（偶）→・・・

（奇）→（偶）→（奇）→・・・

１個増えても減っても偶奇は変化する

遷移確率の極限の挙動①-例４-

操作前の、左の壷にあるボールの個数が偶数/奇数どちらで
あっても奇数回のステップで元の状態に戻ることは不可能

つまり、任意のxに対して、

$$p^n(x,x) = 0 \quad (n\text{は奇数})$$

遷移確率の極限の挙動①-周期-

○ 周期

$p^n(x,x)>0$を満たすすべてのnに対する最大の約数

すなわち、

$$\mathrm{I}_n=\{n\geq 1\colon p^n(x,x)>0\}\text{の最大公約数}$$

先ほどの例４だと、

偶数回のステップで元の状態に戻る可能性があるので

I_n={2,4,6,8,…}　→すべての要素に対する最大公約数は２

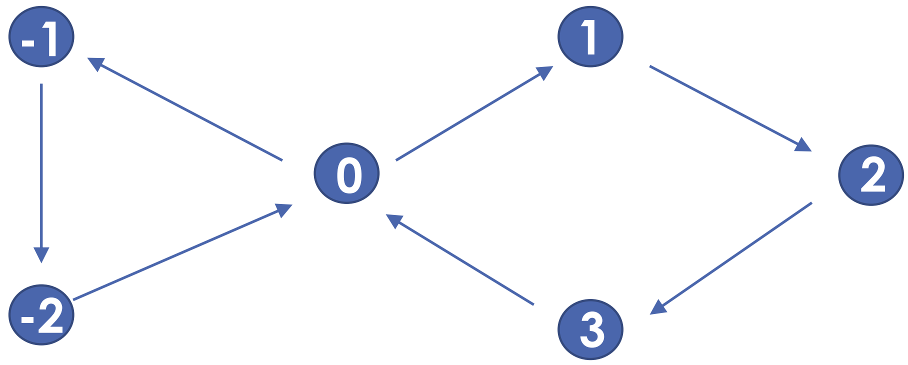
よって周期は２

遷移確率の極限の挙動①-例5-

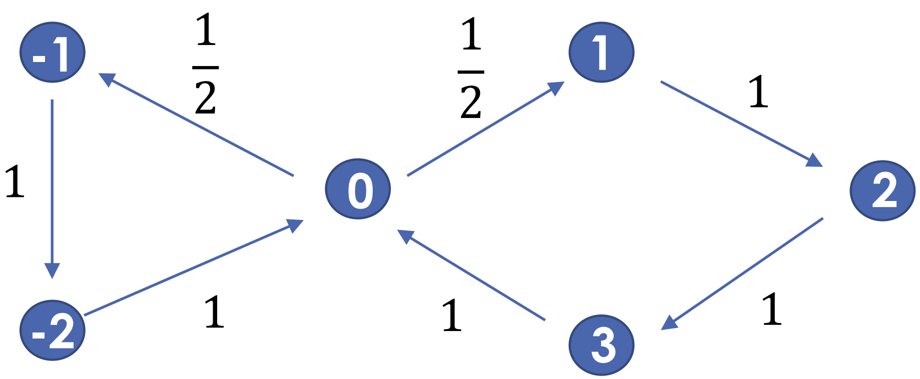
○ 例５ 三角形と四角形

マルコフ遷移が下のような図で表せるような場合を考える.

図中の状態０の周期を求めよ.



遷移確率の極限の挙動①-例5-



各確率を求めると以上のようになる.

状態０からは状態１と状態-１にそれぞれ遷移することが可能なので、それらで場合分けすると最短で以下のようにもとの状態０に戻ることが可能.

(i) ０→１→２→３→１→０　（４ステップ）

(ii) ０→-１→-２→０　（３ステップ）

この時、$3,4 \in I_0$であるので、I_0の最大公約数は１となる.

よって周期は１

遷移確率の極限の挙動②-定常分布-

②$p^n(x,y)$が正の値に収束する場合について考える

- 定常分布

状態が収束するとき、極限を探したい.

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

pはπに収束するので
$\pi p^n = \pi p^{n-1} = \pi p^{n-2} = \cdots = \pi$
が成り立つようにしなければ
ならないので$\pi\, p = \pi$

このときのπを定常分布といい、このπは

$$\pi\, p = \pi$$

の解である.(πはベクトル, pは遷移確率行列)

また、 $\pi(y) \geq 0$かつ$\sum_y \pi(y) = 1$

遷移確率の極限の挙動②-定理４-

- 定理４　（収束定理）

pが既約かつ非周期的で定常分布πを持つとき、

$n \to \infty$で$p^n(x,y) \to \pi(y)$

これは前頁の定常分布の定義そのまま
しかしながら非常に重要！

遷移確率の極限の挙動②-例６-

○ 例６ 収束定理を使ってみよう

例２と同様、1.雪　2.くもり　3.晴れ　とする.

既約かつ非周期的な遷移確率行列pが定常分布πを持つとき、

その定常分布πを求めよ.

これを用いる

	1	2	3
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

定常分布
状態が収束するとき、極限を探したい.

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

このときのπを定常分布といい、このπは

$$\pi\, p = \pi$$

の解である.(πはベクトル, pは遷移確率行列)
また、 $\pi(y) \geq 0$かつ$\sum_y \pi(y) = 1$

遷移確率の極限の挙動②-例６-

定常分布
状態が収束するとき、極限を探したい.
$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$
このときのπを定常分布といい、このπは
$$\pi p = \pi$$
の解である.(πはベクトル, pは遷移確率行列)
また、 $\pi(y) \geq 0$かつ$\sum_y \pi(y) = 1$

	1	2	3
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$とすると$\pi p = \pi$より、

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

この連立方程式を解くと、$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{19}{85}, \frac{48}{85}, \frac{18}{85}\right)$

$$= (0.22353, 0.56471, 0.21176)$$

遷移確率の極限の挙動②-例６参考-

遷移確率-例３おまけ-

p^4やp^8を計算してみると…

$$p^4 = p^2 \cdot p^2 = \begin{pmatrix} 0.2278 & 0.5634 & 0.2088 \\ 0.2226 & 0.5653 & 0.2121 \\ 0.2215 & 0.5645 & 0.2140 \end{pmatrix},$$

$$p^8 = p^4 \cdot p^4 = \begin{pmatrix} 0.22355 & 0.56470 & 0.21175 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \end{pmatrix}.$$

なんか一定値に収束していそうだが…（真相は後ほど）

20

同じ例２を元にして例３にて求めた結果と

今回の定常分布πの計算結果を比較すると

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{19}{85}, \frac{48}{85}, \frac{18}{85}\right)$$
$$= (0.22353, 0.56471, 0.21176)$$

p^2やp^4でも急速に極限πに収束していること

がわかる.

まとめ

マルコフ性

現在の状態X_nが与えられた時、過去のいかなる情報$(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$も

X_{n+1}を予測する際には無関係であるという性質

定理１

mステップでjにマルコフ遷移する確率

$p^m(i,j) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$

は遷移確率行列pのm乗で表される

再帰的/非再帰的

yから出発して初めてyに戻る時刻が有限である

確率は以下のように表せた.

$g_y = P(T_y < \infty \mid X_n = y)$

(i) $g_y < 1$ のとき**非再帰的**

yにｎ回戻ってくる確率g_y^nはｎ→∞のときg_y^n→0.

よってこの時マルコフ連鎖は無限回後の操作の後

yに戻ってこない.このときyは非再帰的である.

(ii) $g_y = 1$ のとき**再帰的**

yにｎ回戻ってくる確率g_y^nはｎ→∞のときg_y^n=1.

よってこの時マルコフ連鎖はyに無限回戻ってくる.

このとき yは再帰的である.

有限マルコフ連鎖において$p^n(x,y) (n \to \infty)$の挙動

(i)状態yが**非再帰的**である場合

$p^n(x,y) = P(X_n = y) \to 0 \ (n \to \infty)$

(ii)状態yが**再帰的**である場合

①$p^n(x,y) (n \to \infty)$は収束しない

②$p^n(x,y) (n \to \infty)$は正の値に収束

周期

$p^n(x,x) > 0$を満たすすべてのnに対する

最大の約数すなわち、

$I_n = \{n \geq 1 : p^n(x,x) > 0\}$の最大公約数

定理４　（収束定理）

pが既約かつ非周期的で定常分布πを持つとき

$n \to \infty$で$p^n(x,y) \to \pi(y)$

定常分布

状態が収束するとき、極限を探したい.

$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$

このときのπを定常分布といい、このπは

$\pi p = \pi$

の解である.(πはベクトル, pは遷移確率行列)

また、 $\pi(y) \geq 0$かつ$\sum_y \pi(y) = 1$