GEVモデル

2016/5/2

スタートアップゼミ#3

交通研4年　前田翠

目次

1章　GEVモデルについて

1-1.GEVモデルの位置づけ

GEVファミリー

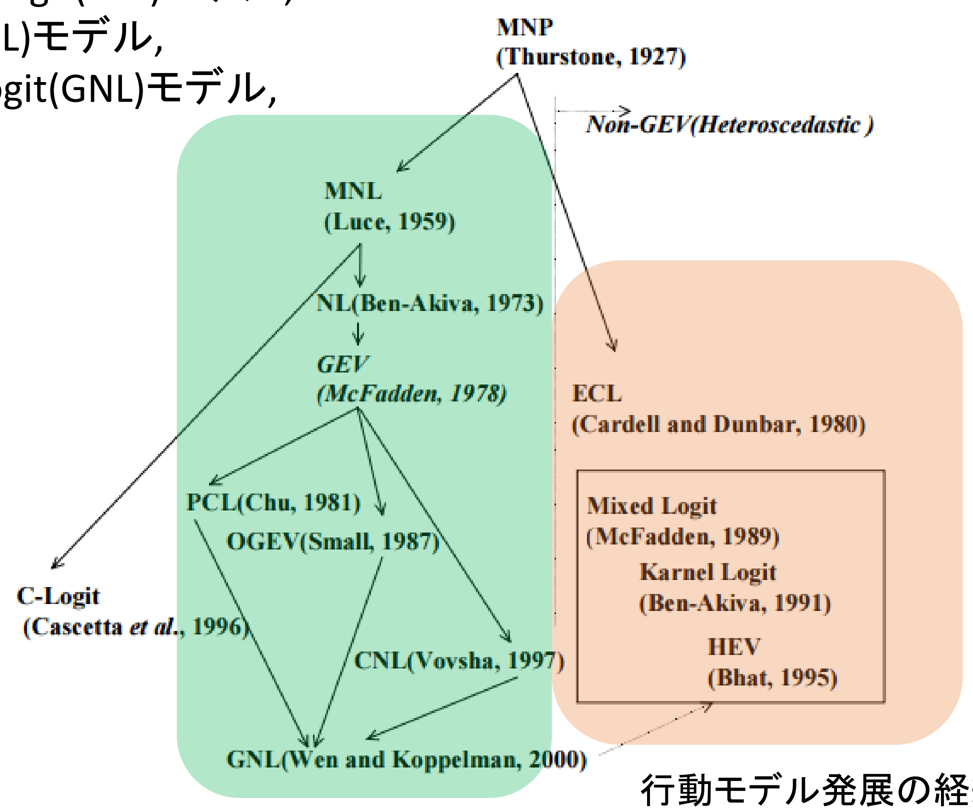
・McFaddenのGEV理論からの派生

(e.g.)
多項ロジット(MNL)モデル,
Nested Logit(NL)モデル,
Paired Combinatorial Logit(PCL)モデル,
Cross-Nested Logit(CNL)モデル,
Generalized Nested Logit(GNL)モデル,
etc.

不等分散性グループ

・効用関数の確率変動成分（誤差項）の不等分散性を考慮したもの

(e.g.)
Kernel Logitモデル,
Mixed Logitモデル,
多項プロビット(MNP)モデル,
etc.



行動モデル発展の経緯 （羽藤,2002）

1-2.GEVモデルとは

GEVモデル

・多項ロジットモデルのIIA特性を緩和し、選択肢間の誤差相関を柔軟に表すことを可能としたモデル
（青バス・赤バスのような問題が生じないようにする）

・選択確率がクローズドフォーム（積分形の残らない式）で書けるため、数値積分の必要がなく、計算負荷が低い

・あらゆる誤差相関のケースに対応したGEVモデルが存在する訳ではなく、表現したい誤差相関を持つGEVモデルが存在しない場合には必要に応じて自ら作る必要がある

・すべてのGEVモデルはG関数から導出することが出来る（後述）

1-3.G関数とは

G関数が満たす4つの性質

Train式定義

① $G \geq 0 \; for \; all \; positive \; values \; of \; Y_j \; \forall j$

② G関数は以下の式を満たす

$$G(\rho Y_1 \rho Y_2, \ldots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_J)$$

③ $G \to \infty \; as \; Y_j \to \infty \; for \; any \; j$

④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i} \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i Y_j} \leq 0$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial Y_i Y_j Y_k} \geq 0$$

一般的な定義

① $G \geq 0 \; for \; all \; positive \; values \; of \; y_j \; \forall j$

② G関数は以下の式を満たす

$$G(\rho y_1 \rho y_2, \ldots, \rho y_J) = \rho^{\mu} G(y_1, y_2, \ldots, y_J)$$

$$for \; \rho > 0$$

③ $G \to \infty \; as \; y_j \to \infty \; for \; any \; j$

④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_i y_j} \leq 0$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial y_i y_j y_k} \geq 0$$

1-3.G関数とGEVモデル

GEVモデルとG関数の関係

G関数から各モデルの選択確率P_iを導出することが可能.
表したい選択肢の誤差項同士の相関が、既存のモデルで表すことが出来ない場合は、独自にG関数を作ればそのG関数に対応する選択確率P_iを導出し、独自のモデルを作ることが可能.

Train式定義

効用確定項Viとすると

$$Y_i = \exp(\mu V_i)$$

$$P_i = \frac{Y_i}{G}\frac{\partial G}{\partial Y_i}$$

一般的な定義

効用確定項Viとすると

$$y_i = \exp(V_i)$$

$$P_i = \frac{y_i}{\mu G}\frac{\partial G}{\partial y_i}$$

$0 \leq \mu \leq 1$は選択肢iのスケールパラメータ
細かい説明は3章にて

2章　各モデルの導出

2-1.(確認してみよう!)MNLモデルの導出

2-2.(やってみよう!)NLモデルの導出

2-3.(参考資料)CNL, GNLの導出とn-GEVの確認

2-1.MNLモデルの導出

Train式定義

① $G \geq 0\ for\ all\ positive\ values\ of\ Y_j\ \forall j$
② G関数は以下の式を満たす
$G(\rho Y_1 \rho Y_2, \dots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$
③ $G \to \infty\ as\ Y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i} \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i Y_j} \leq 0$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial Y_i Y_j Y_k} \geq 0$$

Train式MNLのG関数

$$G = \sum_{j=1}^{J} Y_j$$

① $G = \sum_{j=1}^{J} Y_j = \sum_{j=1}^{J} exp(V_j) \geq 0$
② $G(\rho Y_j) = \sum_{j=1}^{J} \rho Y_j = \rho \sum_{j=1}^{J} Y_j = \rho G$
③ $G \to \infty\ as\ Y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ $\frac{\partial G}{\partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial Y_i}(Y_1 + Y_2 + \cdots Y_i + \cdots Y_J) = 1 \geq 0$
$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i Y_j} = 0 \leq 0$

⇒ $G = \sum_{j=1}^{J} Y_j$はG関数

Train式定義

効用確定項Viとすると

$$Y_i = \exp(\mu V_i)$$
$$P_i = \frac{Y_i}{G}\frac{\partial G}{\partial Y_i}$$

Train式MNLのP_i導出

$$P_i = \frac{Y_i}{G}\frac{\partial G}{\partial Y_i} = \frac{Y_i}{\sum_{j=1}^{J} Y_j} 1 = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j=1}^{J} \exp(\mu V_j)}$$

2-1.MNLモデルの導出

一般的な定義

① $G \geq 0$ $for\ all\ positive\ values\ of\ y_j\ \forall j$
② G関数は以下の式を満たす
$G(\rho y_1 \rho y_2, \ldots, \rho y_J) = \rho^\mu G(y_1, y_2, \ldots, y_J)$
$for\ \rho > 0$
③ $G \to \infty\ as\ y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_i y_j} \leq 0$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial y_i y_j y_k} \geq 0$$

一般的なMNLのG関数 $G = \sum_{j=1}^{J} {y_j}^\mu$

① $G = \sum_{j=1}^{J} {y_j}^\mu = \sum_{j=1}^{J} exp(\mu V_j) \geq 0$
② $G(\rho y_j) = \sum_{j=1}^{J} \rho^\mu {y_j}^\mu = \rho^\mu \sum_{j=1}^{J} Y_j = \rho^\mu G$
③ $G \to \infty\ as\ y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ $\frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}({y_1}^\mu + {y_2}^\mu + \cdots + {y_i}^\mu + \cdots + {y_J}^\mu)$
$= \mu {y_i}^{\mu-1} \geq 0$

$\frac{\partial^2 G}{\partial y_i y_j} = 0 \leq 0$ $\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_i} = \mu(\mu-1){y_i}^{\mu-2} \leq 0$

→ $G = \sum_{j=1}^{J} Y_j$はG関数

一般的な定義

効用確定項Viとすると

$$y_i = \exp(V_i)$$
$$P_i = \frac{y_i}{\mu G}\frac{\partial G}{\partial y_i}$$

μは選択肢iのスケールパラメータ

一般的なMNLのP_i導出

$$P_i = \frac{y_i}{\mu G}\frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\mu \sum_{j=1}^{J} {y_j}^\mu} \mu {y_i}^{\mu-1}$$
$$= \frac{{y_j}^\mu}{\sum_{j=1}^{J} {y_j}^\mu} = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j=1}^{J} \exp(\mu V_j)}$$

2-2.NLモデルの導出

Train式定義

① $G \geq 0\ for\ all\ positive\ values\ of\ Y_j\ \forall j$
② G関数は以下の式を満たす
$G(\rho Y_1 \rho Y_2, \ldots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_J)$
③ $G \to \infty\ as\ Y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i} \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i Y_j} \leq 0$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial Y_i Y_j Y_k} \geq 0$$

Train式NLのG関数

$$G = \sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l} Y_j^{\frac{1}{\lambda_l}}\right)^{\lambda_l}$$

（やってみよう!!）

ネスト$B_1, B_2, \ldots, B_K$の中に選択肢$1, 2, \ldots j, \ldots$が入っている
選択肢iがネストkに属しているとすると…

Train式定義

効用確定項Viとすると

$$Y_i = \exp(V_i)$$
$$P_i = \frac{Y_i}{G}\frac{\partial G}{\partial Y_i}$$

Train式NLのP_i導出

$$P_i = \frac{Y_i}{G}\frac{\partial G}{\partial Y_i} = \frac{\exp(\frac{V_i}{\lambda_k})(\sum_{j \in B_k} \exp(\frac{V_j}{\lambda_k}))^{\lambda_k - 1}}{\sum_{l=1}^{K}(\sum_{j \in B_l} \exp(\frac{V_j}{\lambda_l}))}$$

2-3.NLモデルの導出

一般的な定義

① $G \geq 0$ $for\ all\ positive\ values\ of\ y_j\ \forall j$
② G関数は以下の式を満たす
$G(\rho y_1 \rho y_2, \dots, \rho y_J) = \rho^{\mu} G(y_1, y_2, \dots, y_J)$
$for\ \rho > 0$
③ $G \to \infty\ as\ y_j \to \infty\ for\ any\ j$
④ Gのk次導関数を考えるとき、kが奇数の時は正、kが偶数のときは負

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} \geq 0$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_i y_j} \leq 0$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial y_i y_j y_k} \geq 0$$

一般的なNLのG関数

$$G = \sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l}^{J} y_j{}^{\mu_l} \right)^{\frac{\mu}{\mu_l}}$$

（やってみよう!!）

ネスト$B_1, B_2, \dots, B_K$の中に選択肢$1,2, \dots j, \dots$が入っている
選択肢iがネストkに属しているとすると…

一般的な定義

効用確定項Viとすると

$$y_i = \exp(V_i)$$
$$P_i = \frac{y_i}{\mu G} \frac{\partial G}{\partial y_i}$$

μは選択肢iのスケールパラメータ

一般的なNLのP_i導出

$$P_i = \frac{y_i}{\mu G} \frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{\exp(\mu_k V_i) \sum_{j \in B_l}^{J} (\exp(\mu_k V_j))^{\frac{\mu}{\mu_k} - 1}}{\sum_{l=1}^{K} (\sum_{j \in B_l}^{J} \exp(\mu_l V_j))^{\frac{\mu}{\mu_l}}}$$

３章　各モデルの特徴

配布資料にて解説

４章　スケールパラメータについて

配布資料にて解説