Formulating the Assignment Problem as a Mathematical Program

Sheffi, Y.

Urban transportation networks, Part 2, Chapter 3, pp.56-80, 1985

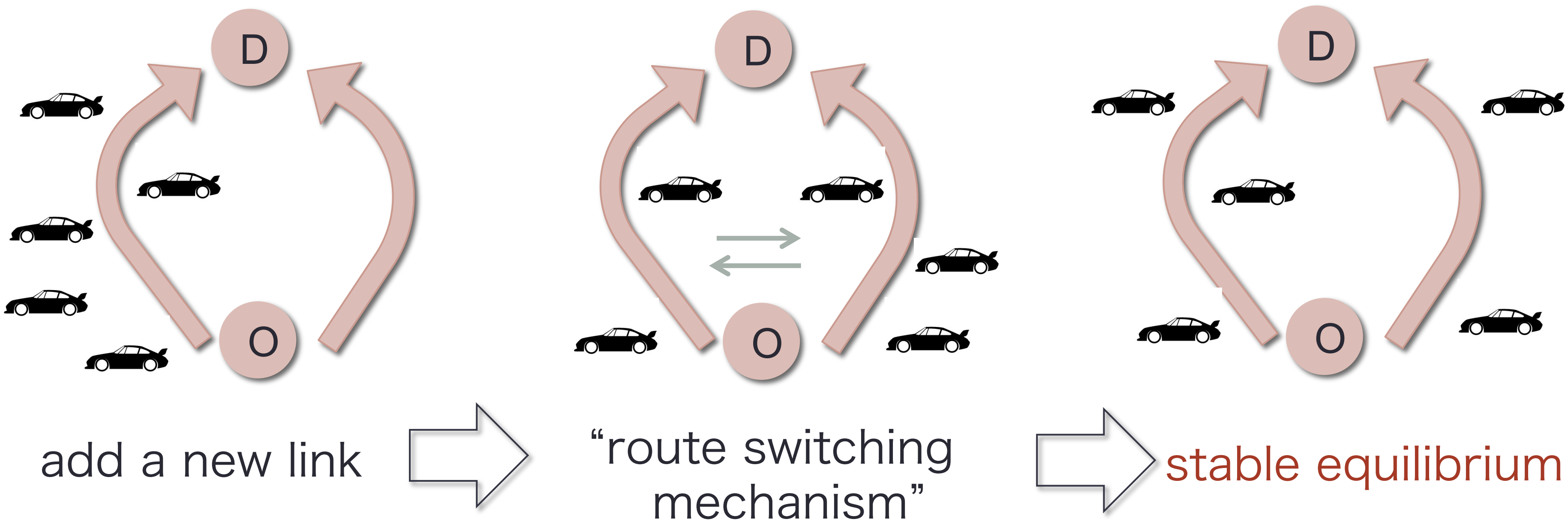
2016年5月9日
スタートアップゼミ#4
B4　森田智美

目次

※1　必要な知識：　最適化 (先週の内容＋α)
※2　解法アルゴリズムは後日

1. 交通ネットワークにおける均衡状態とは

「均衡(equilibrium)」のイメージ



- ドライバーは所要時間の短い経路を選ぼうとする
- 2つのリンクの所要時間が等しくなったとき、安定な均衡状態(=これ以上ドライバーの選択を変化させるインセンティブが働かない状態)となる

利用者均衡配分(user-equilibrium assignment)の目的

- 均衡状態の変化は、
  - ✧リンクの追加
  - ✧新しい交通機関の追加
  - ✧交通規制
  - ✧新しいSCの開業

など、ODパターンやネットワークの変化によって生じる

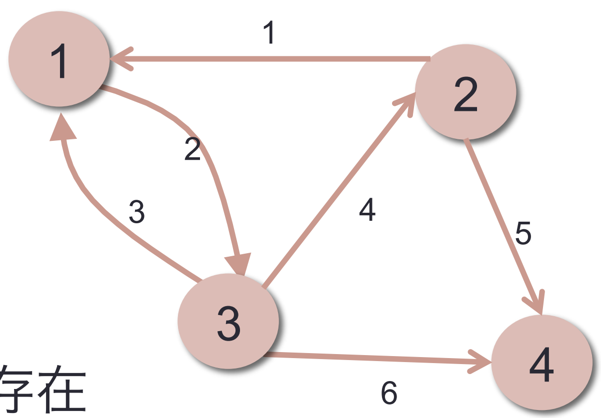
- プロジェクトの実行によって、最終的に交通量の分布がどのような状態に至るのかを算出できる

利用者均衡配分問題を数学的に表現することが次の議論

2. 利用者均衡配分(UE)問題
定式化のための準備

ネットワークのグラフ表現
— ノード、リンク、セントロイド 、パス —

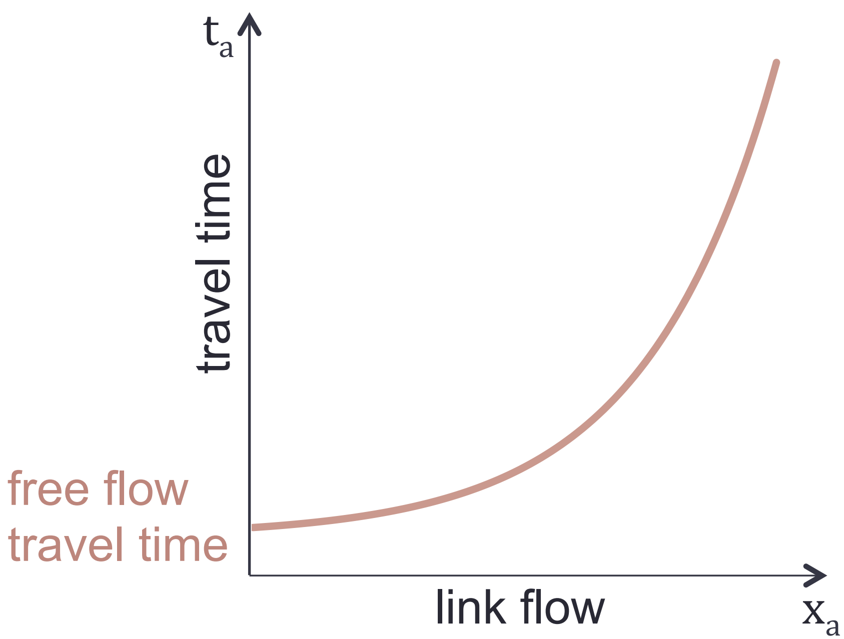
- ネットワークはノードとリンクの集合として表現される
  ノードの集合　N={1,2,3,4}
  (有向)リンクの集合　A={1,2,3,4,5,6}



- 始点/終点セントロイド
  フローが発生/集中する点のこと
- O,Dを結ぶ経路がパス
  一般に、各ODペアに対して複数のパスが存在

リンクパフォーマンス関数

- リンクのフロー(flow)とtravel impedanceの物理的関係を表す
- impedanceの代表は旅行時間(travel time)なので、一般にはフローと旅行時間の関係式と考えてよい



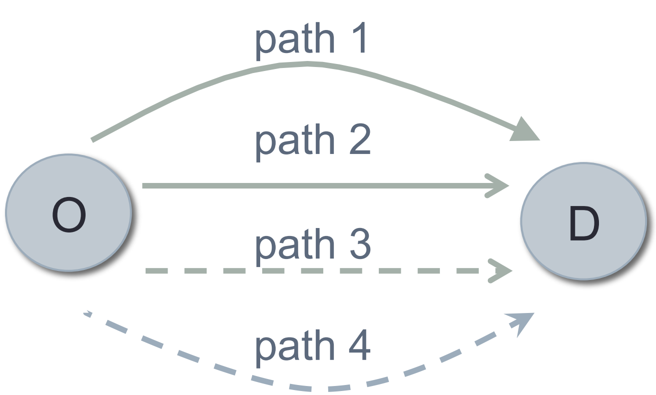
利用者均衡状態(UE)の定義

wardropの第一原則

各ODペアに対して、次が成り立つ：

「利用される経路(path)の旅行時間(travel time)は全て等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい」(Nash均衡と解釈できる)

※各ドライバーが自身の旅行時間を最小化するために行動するという合理的かつ現実的な前提



旅行時間がそれぞれ
t_1=10, t_2=10, t_3=10, t_4=20なら
例えば左の状態があり得る

均衡状態はただひとつ？

UEにおける前提条件：

①情報の完全性、対称性

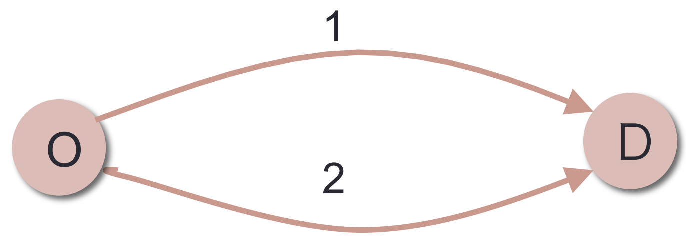
②各ドライバーは各パスの旅行時間を正確に把握し、個人の旅行時間を最小化するために合理的に行動

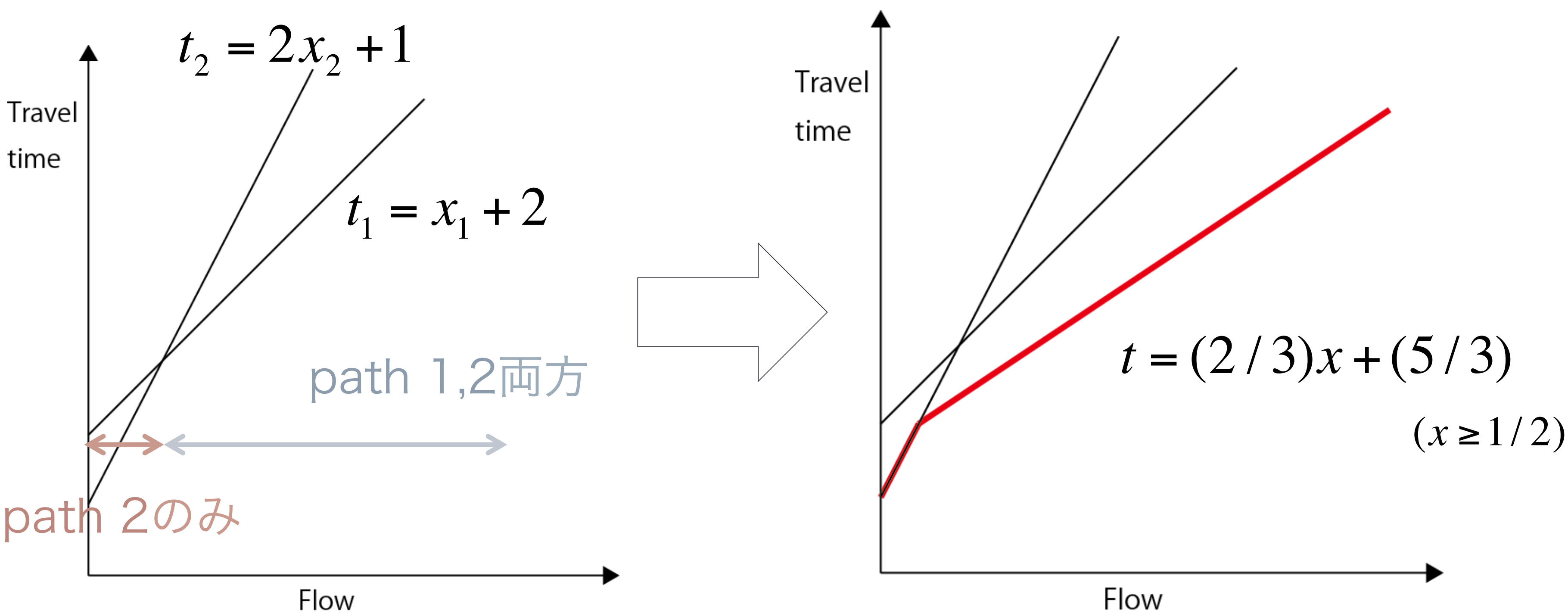
この前提を崩せば、他の均衡状態も考えられる

→　情報が不完全/非対称である場合

→　認知旅行時間を導入した確率的利用者均衡配分(SUE)

UEの簡単な例





$x_1 + x_2 = 5$のとき、$t=5, x_1=3, x_2=2$となることを確認

3. UEを最適化問題として定式化

UE問題の厳密な数学的表現にむけて

input

- グラフで表現されたネットワーク
- OD表
- 各リンクのリンクパフォーマンス関数

配分のルール：利用者の行動原理
(wardropの第一原則)

output

- 各リンクのフロー

これらの要素を目的関数や制約条件に持つ最適化問題として表現すると？

変数の定義

OD表(行列**q**)

a　リンク

r　始点

s　終点

k　各ODに対するパス

q_{rs} 各ODに対するフロー

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix}$$

$\delta_{a,k}^{rs}$ ダミー変数：リンクaがODペア(r,s)を結ぶパスkに含まれる。TRUE = 1, FALSE= 0

c_k^{rs} ODペア(r,s)のパスkの旅行時間

t_a リンクaの旅行時間

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a \delta_{a,k}^{rs}$$

f_k^{rs} ODペア(r,s)のパスkのフロー

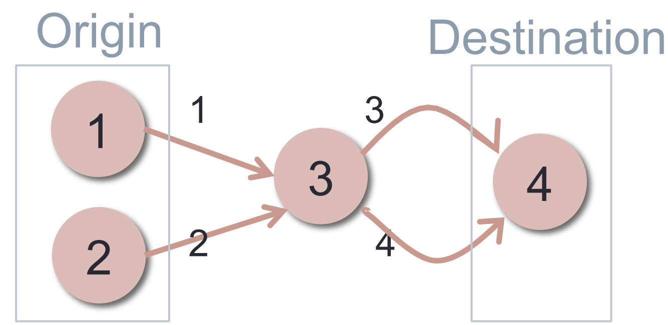
x_a リンクaのフロー

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

煩雑なので具体例

a リンク
r 始点ノード
s 終点ノード
k 各ODに対するパス
q_{rs} 各ODに対するフロー
$\delta_{a,k}^{rs}$ リンクaがODペア(r,s)を結ぶパスkに含まれるかどうか
c_k^{rs} ODペア(r,s)のパスkの旅行時間
t_a リンクaの旅行時間
f_k^{rs} ODペア(r,s)のパスkのフロー
x_a リンクaの旅行時間

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a \delta_{a,k}^{rs} \qquad x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$



(O,D)={ (1 ,4), (2 ,4) }

path 1 : <link i→link 3>
path 2 : <link i→link 4> (i=1,2) と定義

$$c_1^{14} = t_1\delta_{1,1}^{14} + t_2\delta_{2,1}^{14} + t_3\delta_{3,1}^{14} + t_4\delta_{4,1}^{14} = t_1 + t_3$$

$$x_3 = f_1^{14}\delta_{3,1}^{14} + f_2^{14}\delta_{3,2}^{14} + f_1^{24}\delta_{3,1}^{24} + f_1^{24}\delta_{3,1}^{24} \\ = f_1^{14} + f_1^{24}$$

必要な仮説

(直感と異なる？)厳しい仮定

t_aはそのリンクを流れるフローのみの関数で、他のリンクのフローから影響を受けない

(直感と合う？)緩い仮定

リンクパフォーマンス関数 $t_a(\cdot)$は正の値をとり、かつx_aに関する増加関数である

⇨

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_b} = 0 \quad \text{for } a \neq b$$

$$\frac{d t_a(x_a)}{d x_a} > 0$$

※なぜこれらの仮説が必要なのか？　→　次章以降

UEの数学的表現

Beckmann's transformation

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega \qquad ①$$

subject to

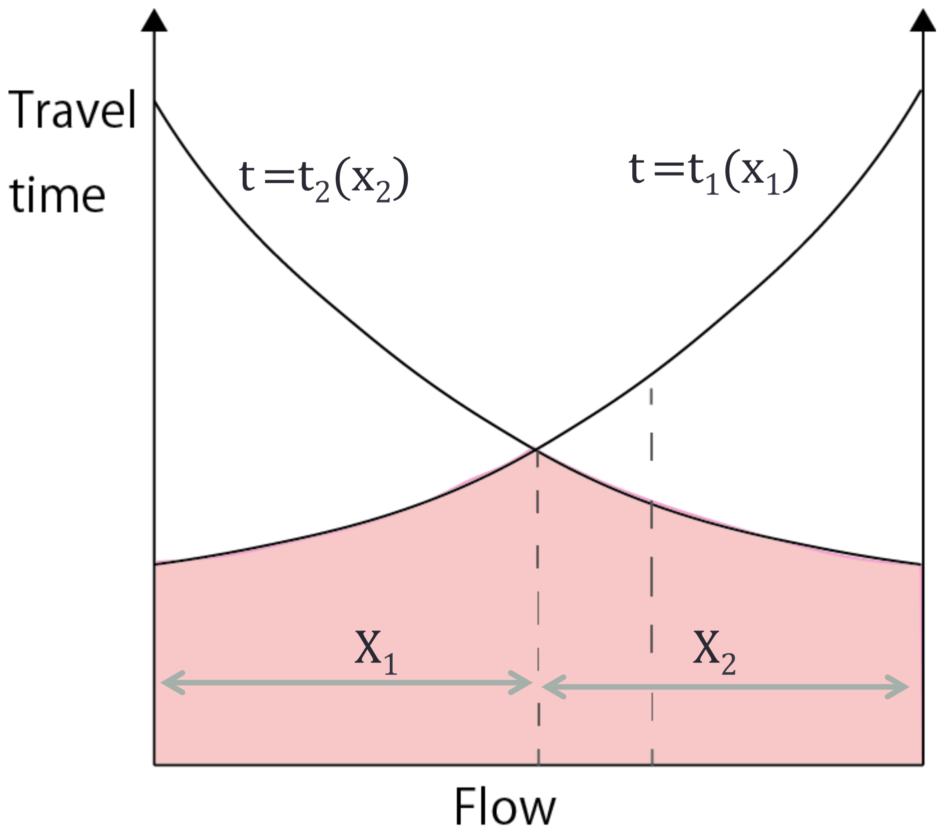
$$\sum_a f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall k, s \qquad ②$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s \qquad ③$$

①目的関数	解釈なし(？)
②フロー保存則	任意のODペア(r,s)に対する全てのパスのフローを合計するとOD表の(r,s)成分になる
③フローの物理的性質	フローの値は非負

目的関数の解釈

- 特に解釈がないとはいえ、以下のような単純な例ではグラフから理解が可能



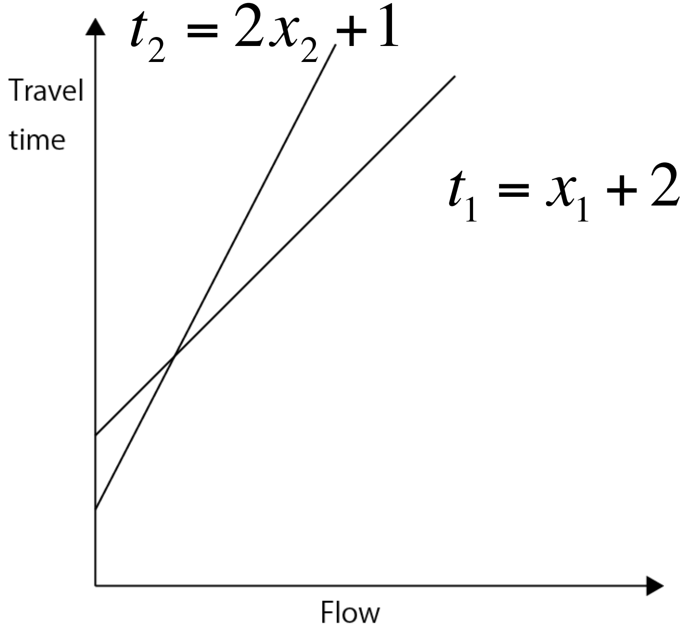
積分の値が最小となるのが均衡点であることを確認

先ほどの例で検証

$$\min z(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} (\omega + 2)\, d\omega + \int_0^{x_2} (2\omega + 1)\, d\omega$$

subject to $x_1 + x_2 = 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$t_2 = 2x_2 + 1$

$t_1 = x_1 + 2$

この最適化問題を解くと、
$t=5, x_1=3, x_2=2$
(先ほどの解と一致)

次章で厳密な証明をします

4. Beckmann’s transformationと UE問題が等価であることの証明

証明の方針

本章 一次の最適性条件が均衡状態を表現していることを示す

次章 一次の最適性条件を満たす停留点が局所最適解であり、さらにそれが大域最適解であることを示す

利用するもの：

- 最適化問題、特に狭義凸計画問題の性質
- リンクパフォーマンス関数についての仮定 ←再登場！

Lagrangianの復習

- ラグランジュ未定乗数法は先週の発表を参照
- 今回はその応用として、特に「実行可能領域が非負、制約条件式が等号線形」の場合を扱う

Lagrangian: $L(\mathbf{x},\mathbf{u})$

変数ベクトル: $\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_i,\ldots,x_I)$

ラグランジュ乗数: $\mathbf{u} = (u_1,\cdots,u_i,\ldots,u_J)$ として、一次の最適性条件は、

$$x_i^* \frac{\partial L(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)}{\partial x_i} \geq 0 \qquad \forall i$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)}{\partial u_j} = 0 \quad \forall j \ , \quad x_i^* \geq 0 \quad \forall i$$

一次の最適性条件を計算①

Beckmann's transformation

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega$$

subject to $\sum_a f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall k,s$ $\qquad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$

Lagrangian： $L(\mathbf{f},\mathbf{u}) = z[\mathbf{x}(\mathbf{f})] + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right)$

一次の最適性条件：

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

$$\boxed{\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial u_{rs}}} = 0 \quad \forall r,s \qquad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \leftarrow \boxed{\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial u_{rs}}}$$

一次の最適性条件を計算②

Lagnragianの偏微分

$$\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_l^{mn}} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \mathrm{z}[\mathbf{x}(\mathbf{f})]}}_{①} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})}}_{②}$$

①式：$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \mathrm{z}[\mathbf{x}(\mathbf{f})] = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_b \int_0^{x_a} \mathrm{t}_b(\omega)d\omega = \sum_{b\in\mathbf{A}} \underbrace{\boxed{\frac{\partial \mathrm{z}(\mathbf{x})}{\partial x_b}}}_{③} \underbrace{\boxed{\frac{\partial x_b}{\partial f_l^{mn}}}}_{④}$

ここで、

③ $$\frac{\partial \mathrm{z}(\mathbf{x})}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b} \sum_a \int_0^{x_a} \mathrm{t}_a(\omega)d\omega = t_b$$

④ $$\frac{\partial x_b}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{b,k}^{rs} = \delta_{b,l}^{mn}$$

⇒ $$\boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \mathrm{z}[\mathbf{x}(\mathbf{f})] = \sum_b t_b \delta_{b,l}^{mn} = c_l^{mn}}$$

①の変形が完成

一次の最適性条件を計算③

Lagnragianの偏微分

①　②

$$\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_l^{mn}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} z[\mathbf{x}(\mathbf{f})]} + \boxed{\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})}$$

②式：$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}) = -u_{mn}$

以上より、Lagnragianの偏微分は

$$\boxed{\frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_l^{mn}} = c_l^{mn} - u_{mn}}$$

c_l^{mn}：ODペア(m,n)のパスlの旅行時間

一次の最適性条件を計算④

一次の最適性条件を思い出すと

$$f_k^{rs}\frac{\partial \mathrm{L}(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial \mathrm{f}_\mathrm{k}^\mathrm{rs}}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(\mathbf{f},\mathbf{u})}{\partial f_k^{rs}}\geq 0 \quad \forall k,r,s$$

$$q_{rs}-\sum_k f_k^{rs} \quad \forall r,s \qquad f_k^{rs}\geq 0 \quad \forall k,r,s$$

Lagrangianの偏微分に先ほどの計算結果を代入すると

$$f_k^{rs}(c_k^{rs}-u_{rs})=0 \quad \forall k,r,s$$

$$c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0 \quad \forall k,r,s$$

これらの解釈は？

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \quad \forall r,s$$

フローの保存則

$$f_k^{rs}\geq 0 \quad \forall k,r,s$$

フローが非負

一次の最適性条件の解釈

$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0$ and $c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0$ は

$f_k^{rs} > 0$ ならば $c_k^{rs} = u_{rs}$

$f_k^{rs} = 0$ ならば $c_k^{rs} \geq u_{rs}$

つまり

任意のODペア(r,s)について、
- 使われているパスの旅行時間は全て等しく u_{rs}
- 使われていないパスの旅行時間はu_{rs}より大きいか、せいぜい等しい

ことを意味し、UEの定義と等価であることがわかる！

5. Beckmann’s transformationの解が一意であることの証明

二次の最適性条件のおさらい

- 一次の最適性条件を満たすのはすべての停留点
- さらにそれが局所最適解であるためには、解$\mathbf{x}^*$の近傍で目的関数$z(\mathbf{x})$のヘッセ行列が正定値となることを示せばよい

ヘッセ行列 $\nabla^2 z(\mathbf{x}^*)$ が正定値 $\Rightarrow$ 解$\mathbf{x}^*$の近傍で$z(\mathbf{x})$が狭義凸関数

- 今回は特に、Beckmann's transformationが凸計画問題であるため、局所最適解がそのまま大域的最適解となる

凸計画問題のおさらい

凸計画問題

目的関数f(x)が狭義凸関数、かつ実行可能領域Sが凸集合である最小化問題

凸集合：　$x, y \in S \Rightarrow \lambda x^* + (1-\lambda) y^* \in S$
狭義凸関数：$f(\lambda x^* + (1-\lambda) y^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(y^*)$　※ $0 \leq \lambda \leq 1$ とする

凸計画問題では、局所最適解がそのまま大域最適解となる

証明

x^*：大域最適解でない局所最適解、y^*: 大域最適解とすると、$f(x^*) > f(y^*)$
凸集合の定義により、 $0 \leq \lambda \leq 1$ としたとき $\lambda x^* + (1-\lambda) y^* \in S$
凸関数の定義により、 $f(\lambda x^* + (1-\lambda) y^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(y^*) < f(x^*)$　(※)
$\lambda \to 1$とすると、点$\lambda x^* + (1-\lambda) y^*$は$x^*$に限りなく近い点を表すことになる。
この時(※)はx^*が局所最適解(x^*近傍で最小値をとる点)であることと矛盾する。

Beckmann's transformationが凸計画問題であることの証明

実行可能領域が凸集合であることの証明

- 実行可能領域 S: $\boxed{\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \ \forall\, r,\, s \quad \text{and} \quad f_k^{rs} \geq 0 \ \ \forall\, k,\, r,\, s}$
- 線形等式制約条件と非負条件のみ→凸集合であることは明白

(凸集合の定義式を利用すればすぐに証明可能)

目的関数が狭義凸関数であることの証明

$$\frac{\partial \mathrm{z}(\mathbf{x})}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a \int_0^{x_a} \mathrm{t}_a(\omega)d\omega = t_b$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{z}(\mathbf{x})}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{t}_a(x_a)}{dx_a} > 0 & \text{for a=b} \\ 0 & \text{for a≠b} \end{cases}$$

(リンクパフォーマンス関数に関する仮定)

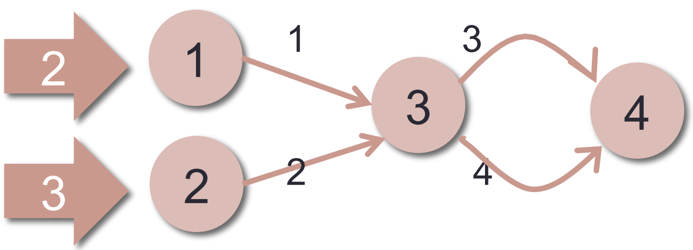
$$\nabla^2 \mathrm{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{t}_1(x_1)}{\partial x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{t}_2(x_2)}{\partial x_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{t}_n(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

は正定値行列

ここまでのまとめと注意

- 前章でBeckmann’s transformationとUEの等価性、本章で最適解の一意性が示せた。
- ただしlink flowが一意　≠　path flowが一意

<具体例>



$x_1=2, x_2=3, x_3=3, x_4=2$

(O,D)=(1,4)　path 1：<link 1→link 3>、path ２：<link 1→link 4>
(O,D)=(2,4)　path 1：<link 2→link 3>、path ２：<link 2→link 4>

可能性1:

$$f_1^{14}=0, f_2^{14}=2, f_1^{24}=3, f_2^{14}=0$$

可能性2:

$$f_1^{14}=2, f_2^{14}=0, f_1^{24}=0, f_2^{14}=3$$

6. システム最適化(SO: System Optimization) との比較

UEとSOの類似点、相違点
– 目的関数と制約条件 –

UE: user equilibrium

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \boxed{\int_0^{x_a} t_a(\omega)\,d\omega}$$

式の解釈：なし

subject to

$$\sum_a f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall k,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

SO: system optimization

$$\min \tilde{z}(\mathbf{x}) = \sum_a \boxed{x_a\, \mathrm{t_a}(x_a)}$$

式の解釈：総旅行時間の最小化

subject to

$$\sum_a f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall k,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

制約条件は同じ

UEとSOの類似点、相違点
- 1次の最適性条件 -

UE: user-equilibrium

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad \forall k, r, s$$

$$c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

ただし $c_k^{rs} = \sum_a t_a \delta_{a,k}^{rs}$

SO: system optimization

$$f_k^{rs}(\tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs}) = 0 \quad \forall k, r, s$$

$$\tilde{c}_k^{rs} - \tilde{u}_{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s$$

ただし $\tilde{c}_k^{rs} = \sum_a \tilde{t}_a \delta_{a,k}^{rs}$

※ $\tilde{t}_a = t_a(x_a) + x_a \dfrac{dt_a(x_a)}{dx_a}$ リンクフローが1単位増加した時の総旅行時間の増分

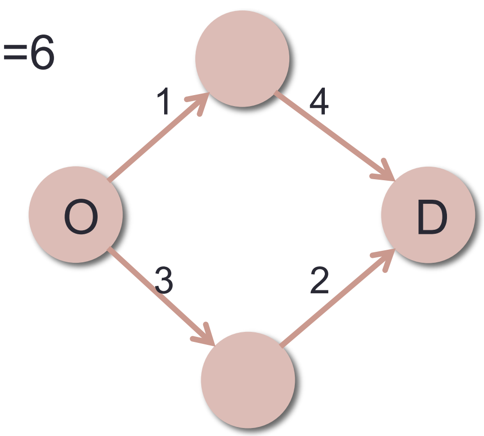
UEとSOの比較

- 共に唯一の最適解を持つが、一般にUE　≠　SO
- SOは安定な均衡状態ではなく、規制等がない状態で実現するのはほぼ困難
- 渋滞の影響がないとき、UE = SOとなる

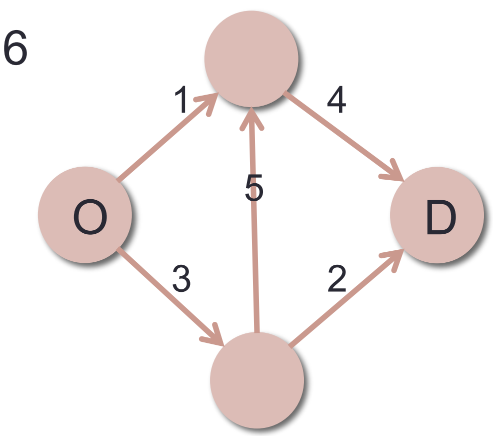
Braess' paradox

- リンクを追加することで旅行時間が悪化する場合がある

q^{OD}=6



q^{OD}=6



$$t_1(x_1) = 50 + x_1$$
$$t_2(x_2) = 50 + x_2$$
$$t_3(x_3) = 10x_3$$
$$t_4(x_4) = 10x_4$$

⇒

$x_1=x_2=x_3=x_4=3$
$c^{OD}=83$

$$t_1(x_1) = 50 + x_1$$
$$t_2(x_2) = 50 + x_2$$
$$t_3(x_3) = 10x_3$$
$$t_4(x_4) = 10x_4$$
$$t_5(x_5) = 10 + x_5$$

⇒

$x_1=x_2=2$
$x_3=x_4=4$
$x_5=2$
$c^{OD}=92$

Braess' paradoxの解釈

- システム改善の目的でリンクを追加しても、利用者の行動原理はあくまで「自身の旅行時間の最小化」であるため、SOの目的関数が改善されるとは限らない

  ※Nash均衡がパレート最適とは限らないことを暗示
  非協調ゲームにおける「囚人のジレンマ」と同類の問題

- 交通容量の拡大が渋滞緩和とならず、むしろ交通容量を制限した方がシステムを改善できる場合がある

ご清聴ありがとうございました！

any questions?