

# MNLで推定しよう

2020.04.14

スタートアップゼミ #2

M1 須賀拓実

# 行動モデルと効用

## 行動モデル

- 人の選択行動(意思決定)を表現するモデル
- 説明変数：選択肢の望ましさを表す特徴量ベクトル
  - 所要時間, 費用, 乗り換え回数…

## ランダム効用最大化

- 効用：各消費者が消費する財から得られる主観的な満足・欲望充足の度合い
- 効用を構成する要因
  - 代替案の属性：所要時間, 費用, 乗り換え回数…
  - 個人属性：年齢, 性別, 免許の有無…
  - トリップ属性：目的, 時間帯…
- 合理的に行動する(=効用最大の選択肢を選択)と仮定
  - 複数の選択肢を選好(好ましさ)の順に並べられる
- ランダム効用：確率的に変化する効用
  - 観測できない説明変数を含む
  - 誤差や不完全な情報もある

# 効用関数

## 効用関数(選択肢*i*)

$$U_i = V_i + \varepsilon_i$$

確定項    誤差項

- **確定項** : 基本的に線形関数

$$V_i = \beta_{car} + \beta_{time}x_{time} + \beta_{cost}x_{cost} + \dots + \beta_k x_k$$

- $\beta_{car}$  : 選択肢固有定数項(選択肢のうち1つは0に基準化)
- $\beta_k$  : パラメータ(どの程度効いているか)
- $x_k$  : 説明変数(所要時間, 費用, ダミー変数…)

- **誤差項** : ある確率分布に従う確率変数

$$\begin{aligned} P(i) &= \Pr(U_i \geq U_j, \forall j \in C) = \Pr(V_i + \varepsilon_i \geq V_j + \varepsilon_j) \\ &= \Pr(\varepsilon_j - \varepsilon_i \leq V_i - V_j) = \Pr(\varepsilon \leq V) \end{aligned}$$

- 確定項の値だけで決まる
- 確率分布によって異なるモデルとなる
  - 正規分布→プロビットモデル
  - ガンベル分布→ロジットモデル

# プロビットモデルとロジットモデル

## プロビットモデル

- 誤差項に正規分布を仮定
- 選択肢*i*の選択確率式

$$P(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2\right) d\varepsilon$$

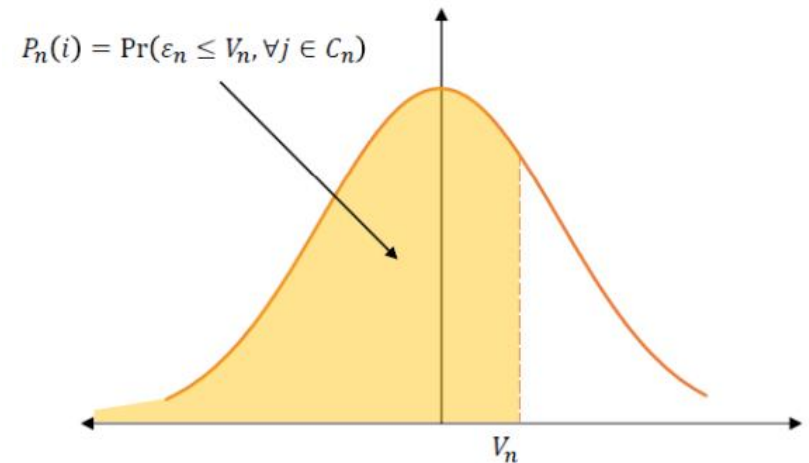
- open-form 確率式の導出大変

## ロジットモデル

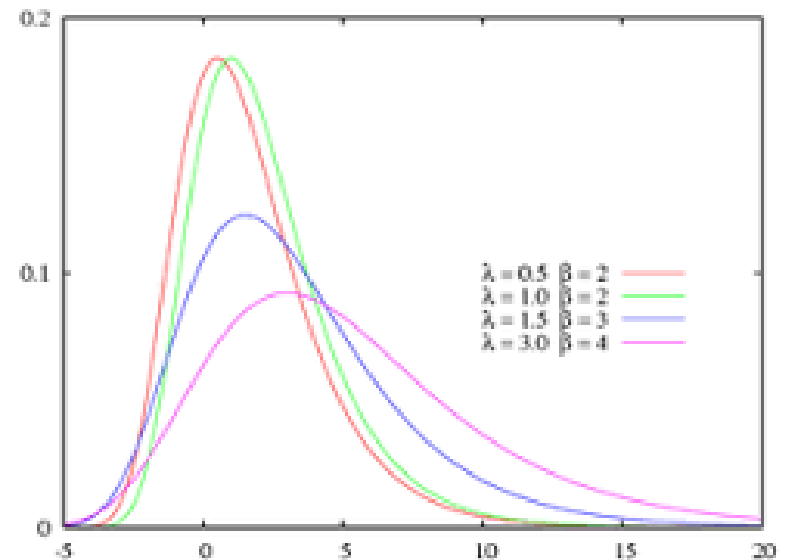
- 誤差項にIID(独立同分布)ガンベル分布を仮定
  - 確率式はプロビットモデルの近似
- 選択肢*i*の選択確率式

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\exp(\mu V_i) + \exp(\mu V_j)}$$
$$= \frac{1}{1 + \exp(-\mu(V_i - V_j))}$$

- $\mu$ : スケールパラメータ
- 誤差項がどれだけ効くか
- closed-form 計算しやすい



正規分布の確率密度関数



# MNLモデル

## Multinomial Logit(多項ロジット)モデル

- 各選択肢の誤差項の確率は独立同分布(IID)に従う
- スケールパラメータ  $\mu > 0$  (普通1)のガンベル分布を仮定
- 選択確率  $P(i) = \Pr[V_i + \varepsilon_i \geq \max_{j \in C, j \neq i} (V_j + \varepsilon_j)] = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$
- IIA特性(無関係な選択肢からの選択確率の独立)
  - 全選択肢を考える必要がない(一対比較を考えればよい)
  - 選択肢の部分集合を用いてもパラメータ推定値にバイアスが生じない
  - 代替選択肢の追加や削除が容易
- 赤バス・青バス問題(相関のある選択肢の影響を受ける)



# NLモデル

## Nested Logit (NL)モデル

- ツリー構造
- 選択肢の確率項間の相関を表現可能

$$\begin{aligned}U_{RB} &= \beta X_{RB} + \varepsilon_{bus} + \varepsilon'_{RB} \\U_{BB} &= \beta X_{BB} + \varepsilon_{bus} + \varepsilon'_{BB} \\U_{car} &= \beta X_{car} + \varepsilon_{car}\end{aligned}$$



- 分散共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{bus}^2 & 0 \\ \sigma_{bus}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

- 選択確率

$$P(a, k) = P(k|a)P(a) = \frac{\exp(\mu_k V_k)}{\sum_i \exp(\mu_k V_i)} \times \frac{\exp(\mu_a (V_a + V'_a))}{\sum_j \exp(\mu_a (V_j + V'_j))}$$
$$V'_a = \frac{1}{\mu_a} \ln \left( \sum_{m \in M} \exp(\mu_m V'_m) \right)$$

# パラメータ推定

## 最尤推定

- サンプルから母集団の行動原理を知る = 行動モデルのパラメータを求める
- 尤度：ある前提条件に従って結果が出現する場合に，逆に観察結果からみて前提条件が「何々であった」と推測する尤もらしさを表す数値
  - 尤度 $P(x|\theta)$ ： $\theta$ を仮定したときに今回の標本が得られる確率
  - 事後確率 $P(\theta|x)$ (観測データから求まる，パラメータが $\theta$ である確率)と違う
- 母集団から，観測された $n$ 個の標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が得られる確率は

$$f_n(x_1, \dots, x_n|\theta) = \sum_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

これを $\theta$ の関数とみると尤度関数 $L(\theta)$ ができる

$$L(\theta) = f_n(x_1, \dots, x_n|\theta)$$

# パラメータ推定

- 尤度関数は個人 $n$ が観察された選択肢を選択する確率と定義

$$L_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \prod_{n=1}^N \prod_i P_n(i)^{y_{in}}$$

- $y_{in}$ は選択肢 $i$ が選択されたとき1, それ以外で0

- 最大化したい対数尤度関数

$$LL_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \sum_{n=1}^N \sum_i y_{in} \log P_n(i)$$

- 最大尤度では, 全てのパラメータについて一階の偏微分が0
- $\frac{\partial LL}{\partial \beta_k} = 0 \forall k \in \{1, \dots, k\}$  を解いて最適な $\beta$ を求める



ここからは、MNLのパラメータ推定  
をRで一緒にやってみましょう

# MNLモデルのパラメータ推定

- データの読み込み

```

1  ### Multinomial Logit model estimation
2
3  ### データファイルの読み込み
4  Data <- read.csv("C:/YokohamaData.csv",header=TRUE)
5  ## データ数数える
6  hh <- データの行数を数える
7
8  ## パラメータ数の分だけ初期値を代入した列ベクトル「b0」を作成
9  b0 <- 初期値は0にすることが多い
10

```

TripID	MonitorID	PurposeC	PurposeJ	PurposeE	Departure	ArrivalTim	TripDurat	ODDistan	LatitudeC	Longitude	DistrictCo	DistrictNa	Zone4cod	Zone4nan	Zone5cod	Zone5nan	LatitudeD	Longitude	DistrictCo	DistrictNa	Zone4cod	Zone4nan	Zone5cod	Zone5nan	Age	Gen
256461	yd021	800	散歩・園遊	Leisure W	40117.3	40117.3	5461	19341.2	35.3485	139.486	205	藤沢市	2050201	本町	2.1E+08	本町一丁目	35.5143	139.598	118	緑区	1008112	中山	1E+08	白幡町A	46	男
256674	yd027	500	買い物	Shopping	40130.8	40130.8	3930	20793.1	35.4436	139.638	104	中区	1003002	関内	1E+08	森砂町	35.6278	139.677							38	男
256291	yd025	400	業務	Work	40115.3	40115.3	2717	10421.3	35.3667	139.572	115	栄区	1009248	上郷	1E+08	上郷町A	35.444	139.637	104	中区	1003002	関内	1E+08	港町	39	女
256382	yd021	100	出勤	Commute	40127.3	40127.3	3749	24457	35.3255	139.409	207	茅ヶ崎市	2070202	東海岸北	2.1E+08	東海岸北二	35.4441	139.636	104	中区	1003002	関内	1E+08	港町	46	男
257459	yd028	700	娯楽	Leisure	40138.4	40138.5	6650	42660.9	35.4643	139.531	112	旭区	1005118	二俣川	1E+08	二俣川一丁	35.2453	139.145	206	小田原市	2060401	板橋	2.1E+08	大塚支所	37	男
257040	yd025	600	食事	Meal	40134.5	40134.5	2570	740.738	35.4434	139.637	104	中区	1003002	関内	1E+08	港町	35.4497	139.634	104	中区	1003002	関内	1E+08	本町六丁目	39	女
256978	yd018	200	帰宅	Return Hc	40133.9	40133.9	3691	29265	35.4239	139.319	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.4873	139.632	102	神奈川区	1001015	白幡	1E+08	白幡上町	54	男
256452	yd027	999	その他	Other	40127.8	40127.8	476	898.806	35.6311	139.68							35.6232	139.682							38	男
256965	yd024	200	帰宅	Return Hc	40133.8	40133.8	3482	19802.6	35.4446	139.637	104	中区	1003002	関内	1E+08	森砂町	35.6163	139.579	135	多摩区	1300502	宿河原	1.3E+08	宿河原4丁	40	男
256459	yd012	200	帰宅	Return Hc	40127.9	40128	3731	27332.7	35.4226	139.317	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.4597	139.615	103	西区	1002008	同野	1E+08	西平沼町	46	男
256769	yd002	200	帰宅	Return Hc	40131.8	40131.8	2338	20828.2	35.6357	139.628							35.4484	139.621	103	西区	1002004	西戸部	1E+08	西戸部町	44	男
256843	yd027	999	その他	Other	40132.7	40132.7	392	924.584	35.6311	139.68							35.6229	139.682							38	男
256812	yd022	600	食事	Meal	40132.5	40132.5	1827	2170.15	35.4821	139.64	104	中区	1003002	関内	1E+08	新港一丁目	35.4659	139.624	103	西区	1002001	高島	1E+08	高島二丁目	37	男
256061	yd008	200	帰宅	Return Hc	40123.6	40123.6	999	1338.58	35.4301	139.665	104	中区	1003010	本牧	1E+08	小港町	35.4254	139.652	104	中区	1003012	西之谷	1E+08	本牧緑ヶ丘	0	女
256231	yd006	500	買い物	Shopping	40125.7	40125.7	2274	3028.8	35.4524	139.581	106	保土ヶ谷区	1005010	桜ヶ丘	1E+08	花見台	35.4298	139.563	110	戸塚区	1009032	東戸塚	1E+08	森園町B	0	女
256524	yd004	200	帰宅	Return Hc	40128.9	40128.9	8344	18830.5	35.4242	139.319	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.4425	139.625	116	泉区	1009326	同津北	1E+08	緑園四丁目	36	男
256843	yd023	100	出勤	Commute	40121.3	40121.3	3009	10939.6	35.4998	139.517	112	旭区	1005103	中希望ヶ丘	1E+08	中希望ヶ丘	35.4445	139.637	104	中区	1003002	関内	1E+08	森砂町	45	男
256632	yd022	100	出勤	Commute	40130.3	40130.3	1921	10111.6	35.4057	139.535	110	戸塚区	1009029	矢部	1E+08	矢部町A	35.4448	139.636	104	中区	1003002	関内	1E+08	森砂町	37	男
256777	yd005	700	娯楽	Leisure	40120.4	40120.5	4196	14499.7	35.0322	139.534							35.9211	139.618							28	男
256559	yd011	100	出勤	Commute	40129.4	40129.4	979	4273.9	35.4352	139.36	212	厚木市	2120102	駅南	2.1E+08	旭町5	35.4442	139.315	212	厚木市	2120601	森の里東	2.1E+08	青山1	31	男
256985	yd018	200	帰宅	Return Hc	40122.9	40122.9	4377	29602.2	35.4245	139.319	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.4887	139.636	102	神奈川区	1001014	浦島丘	1E+08	白幡仲町	54	男
256514	yd010	200	帰宅	Return Hc	40128.8	40128.9	7010	37144.9	35.426	139.32	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.2557	139.673	201	横浜賀市	2010407	公郷	2E+08	公郷3丁目	36	男
256996	yd030	200	帰宅	Return Hc	40134	40134.1	9229	14183.9	35.4415	139.314	212	厚木市	2120601	森の里東	2.1E+08	若岩A	35.5352	139.421	209	相模原市	2090407	若松	2.1E+08	若松6丁目	39	男
258021	yd008	999	その他	Other	40144.8	40144.8	982	1817.25	35.4295	139.662	104	中区	1003010	本牧	1E+08	本牧町A	35.4388	139.645	104	中区	1003017	山手	1E+08	元町	0	女
257573	yd018	500	買い物	Shopping	40139.6	40139.6	687	1721.7	35.505	139.626	109	港北区	1008040	富士塚	1E+08	富士塚二丁	35.5006	139.644	102	神奈川区	1001001	西寺尾	1E+08	西寺尾一丁	54	男
256738	yd023	800	散歩・園遊	Leisure W	40131.6	40131.7	4200	125.463	35.4594	139.517	112	旭区	1005103	中希望ヶ丘	1E+08	中希望ヶ丘	35.4605	139.517	112	旭区	1005121	東希望ヶ丘	1E+08	東希望ヶ丘	45	男
256373	yd018	200	帰宅	Return Hc	40126.9	40126.9	3654	29638.7	35.4241	139.318	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	35.4886	139.636	102	神奈川区	1001014	浦島丘	1E+08	白幡仲町	54	男
257313	yd002	100	出勤	Commute	40137.3	40137.3	3352	27612.9	35.4491	139.621	103	西区	1002004	西戸部	1E+08	西戸部町	35.4246	139.318	212	厚木市	2120802	同津古久	2.1E+08	日産テケニ	44	男
257169	yd017	200	帰宅	Return Hc	40135.8	40135.8	1119	3968.27	35.4651	139.624	103	西区	1002001	高島	1E+08	高島二丁目	35.4355	139.648	104	中区	1003017	山手	1E+08	山手町	47	男

# MNLモデルのパラメータ推定

- パラメータの設定と効用確定項Vの計算

```
12 ##### Logit modelの対数尤度関数の定義 #####
13
14 Fr <- function(x) {
15   ### パラメータの宣言
16   ## 定数項
17   b1 <- x[1]
18   b2 <- x[2]
19   b3 <- x[3]
20   b4 <- x[4]
21
22   ## 目的地までの所要時間
23   d1 <- x[5]
24
25   ## 対数尤度のための変数を宣言
26   LL = 0
27
28   ### 今回用いる交通手段は以下の5つ
29   ## 鉄道(train)
30   ## バス(bus)
31   ## 自動車(car)
32   ## 自転車(bike)
33   ## 徒歩(walk)
34
35   ## 効用の計算：説明変数にしたい列を入れる
36   # 時間 # 定数項
37   train <- Data$ModeAvailableTrain*
38   bus <- Data$ModeAvailableBus *
39   car <- Data$ModeAvailableCar *
40   bike <- Data$ModeAvailableBike *
41   walk <- Data$ModeAvailablewalk *
42
```

ベクトルxのi番目の要素

$$\frac{\exp(\mu V_{in})}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

# MNLモデルのパラメータ推定

- 選択確率の計算

```
43   ### 選択確率の計算
44   ## 分母となる、各々のexp(v)の和をつくる
45   deno <- (car + train + bus + bike + walk)
46
47   ## それぞれ計算する
48   Ptrain <- Data$ModeAvailableTrain*
49   Pbus    <- Data$ModeAvailableTrain
50   Pcar    <- Data$ModeAvailableCar *
51   Pbike   <- Data$ModeAvailableBike *
52   Pwalk   <- Data$ModeAvailablewalk *
```

$$\frac{\exp(\mu V_{in})}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

```
53
54   ## 選択確率が0 になってしまった場合に起こる問題の回避
55   ## その場合には1を返して対応
56   Ptrain <-
57   Pbus    <-
58   Pcar    <-
59   Pbike   <-
60   Pwalk   <-
```

選択確率が0だと尤度も0→  
対数尤度  $\ln 0 = -\infty$  でエラー  
選択確率0の時1にする処理

```
61
62
63   ## 選択結果
64   Ctrain  <- Data$MainModeENG == "Rail"
65   Cbus    <- Data$MainModeENG == "Bus"
66   Ccar    <- Data$MainModeENG == "Car"
67   Cbike   <- Data$MainModeENG == "Bicycle"
68   Cwalk   <- Data$MainModeENG == "walk"
```

```
69
70   ## 対数尤度
71   LL <-
```

$$\text{対数尤度 } LL_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \sum_{n=1}^N \sum_i y_{in} \log P_n(i)$$

```
72
73
74 }
```

# MNLモデルのパラメータ推定

- 対数尤度関数の最大化

```
76 ##### 対数尤度関数frの最大化 #####  
77  
78 ## パラメータ値の最適化 最適化関数optim (重要なので要確認)  
79 res <- optim(      下を見て埋めよう  
80
```

- 最適化関数optim

- optim(par, fn, gr = NULL, method = c("Nelder-Mead", "BFGS", "CG", "L-BFGS-B", "SANN"), lower = -Inf, upper = Inf, control = list(), hessian = FALSE, ...)
- parというパラメータを初期値として, fnを最小化するようにパラメータを動かしながら反復して探索(最大化の場合はfnscale=-1)

- 探索方法をmethodから選ぶ(今回はNelder-Meadを使う)

- “Nelder-Mead”法: 関数値だけを用い頑健(初期値の選択に敏感)だが遅い
- “BFGS”法: 準ニュートン法. 関数値と勾配関数を関数の曲面近似に使う
- “CG”法: 共役勾配法. 破綻しやすいがメモリ使用量が少ない
- “L-BFGS-B”法: 変数の上限・下限を設定した準ニュートン法
- “SANN”法: 確率的手法である焼きなまし法. 関数値だけを用い遅い

- 局所的最適解の可能性もある. 初期値ややり方を変えよう

# MNLモデルのパラメータ推定

## 結果の表示

- t値：母集団の平均値の仮説検定に利用。  $|t| > 1.96$  で5%有意
- 最尤推定値  $\theta^*$  の分散共分散行列が、対数尤度のヘッセ行列 (フィッシャー情報行列) の逆行列に  $\theta^*$  を代入したものに等しい。 (クラメール・ラオの限界)
- 分散共分散行列：  $(k, l)$  成分が  $E[(X_k - \mu_k)(X_l - \mu_l)]$
- ヘッセ行列：  $(k, l)$  成分が  $\frac{\partial^2 L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_k \partial \theta_l}$
- クラメール・ラオの限界(等号は  $\hat{\theta}$  が有効推定量の時成立)

$$V(\hat{\theta}) \geq E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} f(X; \theta) \right)^2 \right]^{-1}$$

```
81 ## パラメータ推定値、ヘッセ行列
82 b <- res$par
83 hhh <- res$hessian
84
85 ## t値の計算
86 tval <- b/ ## ヘッセ行列の逆行列の
87 ## 対角成分の平方根
88 ## 初期尤度
89 L0 <- fr(b0)
90 ## 最終尤度
91 LL <- res$value
92
93 ##### 結果の出力 #####
94 print(res)
95 ## 初期尤度
96 print(L0)
97 ## 最終尤度
98 print(LL)
99 ## p^2 尤度比
100 print
101 ## 修正済みp^2値
102 print((L0-(LL-length(b)))/L0)
103 ## パラメータ推定値
104 print(b)
105 ## t値
106 print(tval)
107
```

# MNLモデルのパラメータ推定

- パラメータの正負など直感的に正しいかを確認する
- パラメータ値に直接の意味はない

## うまく回らない時は

- データセットの不備 (NA, 数字と文字の混在…)
- パラメータの設定
- 型(文字列, 整数, 実数…)の確認
- データスケール統一
- 一行ずつ実行する
- 少ないデータで試行

```
LL] -1283.725
$counts
function gradient 396 NA
```

```
$convergence
[1] 0
```

```
$message
NULL
```

```
$hessian
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	-174.135203	7.4149731	119.001294	28.149800	-24.5266351
[2,]	7.414973	-33.6138868	9.242299	7.542625	0.4983249
[3,]	119.001294	9.2422988	-228.143895	56.309560	26.1743460
[4,]	28.149800	7.5426252	56.309560	-152.676188	6.9525599
[5,]	-24.526635	0.4983249	26.174346	6.952560	-8.2540995

```
> ## 初期尤度
> print(L0)
[1] -2134.288
> ## 最終尤度
> print(LL)
[1] -1283.725
> ## p^2値
> print((L0-LL)/L0)
[1] 0.398523
> ## 修正済みp^2値
> print((L0-(LL-length(b)))/L0)
[1] 0.3961803
> ## パラメータ推定値
> print(b)
[1] 0.6094431 -1.7053668 -1.5367356 -1.3186491 -11.1276633
> ## t値
> print(tval)
[1] 5.301556 -9.166117 -13.152531 -12.213269 -20.983429
```

計算の繰り返し回数

convergence: 0なら収束  
(局所的最適解の可能性もある)

エラーメッセージ

尤度比: 初期尤度から最終尤度  
までどれだけ尤度が上がったか

尤度比からサンプル数  
の影響を排除した値

# MNLモデルのパラメータ推定

## 結果の書き方

- ExcelからTeXの表に変換
- TeXの表から図(png)に変換→TeXclip
- 罫線→ $\hline$ , 有意なパラメータのt値に\*をつける, %を $\%$ に

<http://keisukekondo.webcrow.jp/computer/tex/indexjp.html>

説明変数	パラメータ	
所要時間[分]	0.609	5.30 **
定数項(鉄道)	-1.705	-9.17 **
定数項(バス)	-1.537	-13.15 **
定数項(自動車)	-1.319	-12.21 **
定数項(自転車)	-11.128	-20.98 **
サンプル数	1522	
初期尤度	-2134.288	
最終尤度	-1283.725	
尤度比	0.399	
修正済み尤度比	0.396	

\*\*1%有意

A1	A	B	C	D
1	説明変数	パラメータ		
2	所要時間[分]	0.609	5.3	
3	定数項(鉄)	-1.705	-9.17	
4	定数項(バ)	-1.537	-13.15	
5	定数項(自)	-1.319	-12.21	
6	定数項(自)	-11.128	-20.98	
7	サンプル数	1522		
8	初期尤度	-2134.29		
9	最終尤度	-1283.73		
10	尤度比	0.399		
11	修正済み尤	0.396		
12			**1%有意	

(注) 基本的には単純な表は変換可能ですが、行や列を一部結合したものはうまく変換できません。

Excelの表 変換

説明変数	パラメータ	
所要時間[分]	0.609	5.3
定数項(鉄道)	-1.705	-9.17
定数項(バス)	-1.537	-13.15
定数項(自動車)	-1.319	-12.21
定数項(自転車)	-11.128	-20.98
サンプル数	1522	
初期尤度	-2134.288	
最終尤度	-1283.725	
尤度比	0.399	
修正済み尤度比	0.396	
		**1%有意

TeXの表

```

\begin{tabular}{l|l|l}
説明変数 & パラメータ & \\
\hline
所要時間[分] & 0.609 & 5.3 \\
定数項(鉄道) & -1.705 & -9.17 \\
定数項(バス) & -1.537 & -13.15 \\
定数項(自動車) & -1.319 & -12.21 \\
定数項(自転車) & -11.128 & -20.98 \\
\hline
サンプル数 & 1522 & \\
初期尤度 & -2134.288 & \\
最終尤度 & -1283.725 & \\
尤度比 & 0.399 & \\
修正済み尤度比 & 0.396 & \\
& & **1%有意 \\
\end{tabular}

```

非対応: 罫線, multicolumn, フォントのボールド・イタリック体.

```

3 \hline
4 所要時間[分] & 0.609 & 5.30 ** \\
5 定数項(鉄道) & -1.705 & -9.17 ** \\
6 定数項(バス) & -1.537 & -13.15 ** \\
7 定数項(自動車) & -1.319 & -12.21 ** \\
8 定数項(自転車) & -11.128 & -20.98 ** \\
9 \hline
10 サンプル数 & 1522 & \\
11 初期尤度 & -2134.288 & \\
12 最終尤度 & -1283.725 & \\
13 尤度比 & 0.399 & \\
14 修正済み尤度比 & 0.396 & \\
15 \hline
16 & & **1%有意 \\
17 \end{tabular}

```

-1.537	-13.15 **
-1.319	-12.21 **
-11.128	-20.98 **
1522	
-2134.288	



## 来週までの課題

1. 今回見せたコードを穴埋めして完成させる(MNLによる交通機関選択モデル) ※答えもGoogleドライブに入っています
2. 自分で効用関数を設定してパラメータ推定を行う

## 課題発表までの課題

1. NLやCNL (Cross Nested Logit)など他のモデルでも推定し、MNLの場合と比較する。NLのヒント：<http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/kaken/pdf/nl.pdf>
2. パラメータ推定の結果から、政策を行った際に起こる変化を予測し、その効果について述べる

例：横浜臨海部で自動運転タクシーを導入したい。料金をいくらにすればどれくらいの利用者が確保できるだろうか？

### ・ ヒント

1. 交通機関選択モデルのパラメータを推定する
2. 自動運転タクシーを導入した際のLOSについて考える
3. ある距離帯の移動における自動運転タクシーの選択確率を計算する