

スタートアップゼミ #4

交通ネットワークの均衡分析

渡邊 葵

目次

1 均衡配分

1.1 交通量配分

1.2 均衡の概念

1.3 交通ネットワークの記述

2 利用者均衡モデル

2.1 UEの定式化

2.2 UEの解法

2.3 システム最適配分と混雑課金

3 確率的利用者均衡モデル

3.1 SUEの定式化

3.2 SUEの解法

3.3 確率的配分の解法

目標：

1. 均衡配分とは何かを理解する
2. UEの定式化と基本的な解法を理解する
3. SUEの定式化と基本的なアルゴリズムを知る

参考文献

- Sheffi, Y. (1985). *Urban transportation networks* (Vol. 6). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

著者が無償公開：<https://sheffi.mit.edu/book/urban-transportation-networks>

2013年度Sheffiゼミ：<http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/sheffi2013/>

- 土木学会. (1998). 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法.

東工大 朝倉・福田研究室のゼミ

2018年度：<http://www.plan.cv.titech.ac.jp/fukudalab/research/lab-seminar/2018FundamentalSeminar.html>

2017年度：<http://www.plan.cv.titech.ac.jp/fukudalab/research/lab-seminar/2017-basic-seminar.html>

- 土木学会. (2017). 土木計画学ハンドブック.

Daganzo, C. F., & Sheffi, Y. (1977). On stochastic models of traffic assignment. *Transportation science*, 11(3), 253-274.

Fisk, C. (1980). Some developments in equilibrium traffic assignment. *Transportation Research Part B: Methodological*, 14(3), 243-255.

赤松隆. (1996). 交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論. *土木計画学研究・論文集*, 13, 23-48.

Beckmann, M., McGuire, C. B., & Winsten, C. B. (1956). *Studies in the Economics of Transportation* (No. 226 pp).

佐佐木綱. (1965). 吸収マルコフ過程による交通量配分理論. *土木学会論文集*, 1965(121), 28-32.

Akamatsu, T. (1996). Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment. *Transportation Research Part B: Methodological*, 30(5), 369-386.

1 均衡配分

1 均衡配分

1.1 交通量配分

1.2 均衡の概念

1.3 交通ネットワークの記述

2 利用者均衡モデル

2.1 UEの定式化

2.2 UEの解法

2.3 システム最適配分と混雑課金

3 確率的利用者均衡モデル

3.1 SUEの定式化

3.2 SUEの解法

3.3 確率的配分の解法

目標：

1. 均衡配分とは何かを理解する
2. UEの定式化と基本的な解法を理解する
3. SUEの定式化と基本的なアルゴリズムを知る

1.1 交通量配分

■ 交通量配分問題の定義

交通ネットワークを対象に、需要OD交通量と配分原則を与件として、
ネットワークの各リンクを流れる交通量を予測する問題

交通ネットワーク：グラフによるネットワーク表現

需要OD交通量：各ODペア間の交通量

配分原則：利用者の行動原理の仮定 → 実現する均衡状態

1.2 均衡の概念

■ 配分原則の例：Wardropの第一原則

仮定：

1. 全ての利用者は常に旅行時間を最小とするよう行動する
2. 利用者は常に利用可能な経路について完全な情報を得ている

均衡状態：

どの利用者也経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮できない (Nash均衡)

||

Wardropの第一原則 (等時間原則)

利用される経路の旅行時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい

利用者均衡配分(UE)

User Equilibrium assignment

補足. 動学過程の記述：調整動学の導入による確率安定性解析(参考: 青本5.6節)

1.2 均衡の概念

■ その他の均衡状態

システム最適化配分 (SO; System Optimum assignment)

道路網上の総旅行時間が最小 : Wardropの第二原則

確率的利用者均衡 (SUE; Stochastic User Equilibrium assignment)

どの利用者也経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することができないと信じている均衡状態. UEの仮定緩和.

Daganzo & Sheffi (1977), Fisk (1980)

動的利用者均衡 (DUE; Dynamic User Equilibrium assignment)

任意の時刻に出発した車が、目的地に到達するまでの経路の旅行時間に対して、常にWardrop均衡が成立する.

赤松 (1996)

補足1. 需要固定型UE(UE/FD)に対して、OD分布と交通量配分を同時決定する需要変動型(UE/VD)がある(参考: 青本7章).

補足2. 都市経済モデルにおいて、均衡条件を課して定式化するものが多い. その意味で、都市経済モデルと交通量配分問題は適当な変数の読み替えによって等価な問題となり得る. そのため、同様の解法が適用できたりする.



1.2 均衡の概念

■ 需要-パフォーマンス均衡

交通均衡の概念は、新古典経済学の需要-供給均衡とはややニュアンスが異なる

リンク交通量：人々の経路選択結果としての経路交通量を当該リンクについて足し合わせたもの
リンクパフォーマンス関数：当該リンク固有に定義される

需要-パフォーマンス均衡

独立した二つのシステムが交通ネットワーク上で相互に依存し合いながら達成される、
交通量とリンクコストについてのある均衡状態

||

経路ごとの利用者数に応じた経路の利用コストが、各経路ごとの利用者の限界評価値
(支払い意思額) に一致する点

1.3 交通ネットワークの記述

■ 交通ネットワークのグラフ表現

- ネットワーク：ノードとリンクの集合

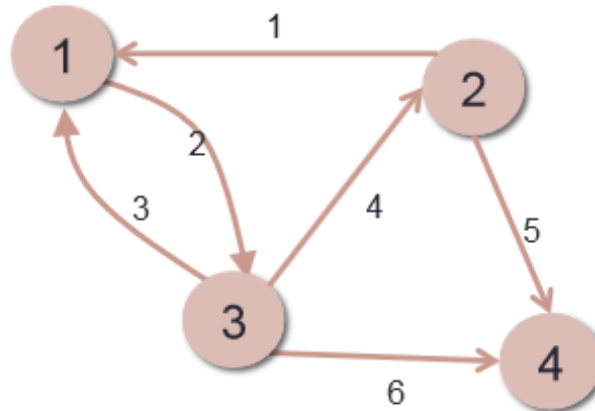
ノード集合： $N = \{1,2,3,4\}$

(有向)リンクの集合： $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

- 始点/終点セントロイド：フローが発生/集中するノード

- パス：OD間を結ぶ経路

一般に各ODペアに対して複数のパスが存在.



1.3 交通ネットワークの記述

■ リンクパフォーマンス関数

BPR関数：リンクの流量と旅行時間の関係式

$$t_a(x_a) = t_{a0} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{x_a}{C_a} \right)^\beta \right\}$$

t_a ：リンク a の旅行時間

t_{a0} ：リンク a の自由旅行時間(交通量0のとき)

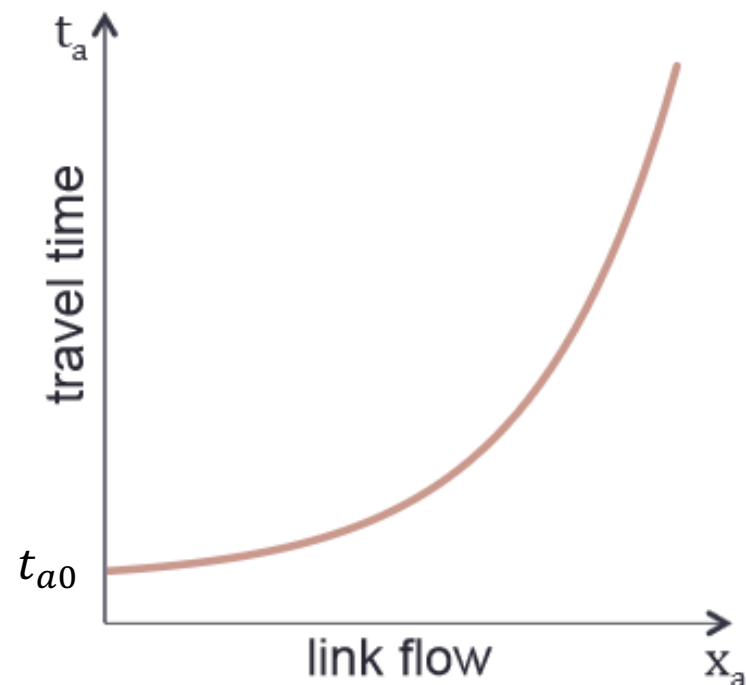
x_a ：リンク a の流量

C_a ：リンク a の交通容量

α, β ：パラメータ(日本だと $\alpha = 2.62, \beta = 5$)

BPR関数の特徴

- 自身のリンク交通量のみの関数
- 単調増加で、 $\forall x_a \geq 0$ で定義されている



補足1. リンク間に相互干渉がある場合、すなわち、リンクパフォーマンス関数が他のリンクの交通量にも依存する場合、2.1の最適化問題への置換が出来ず、変分不等式問題(VIP: Variational Inequality Problem)として解かれる(参考: 青本5.4節)

補足2. 交通量 x_a のすべての領域で定義され、かつ、単調増加関数である、ということにより単純なFrank-Wolfe法で解ける.

2 利用者均衡モデル

1 均衡配分

1.1 交通量配分

1.2 均衡の概念

1.3 交通ネットワークの記述

2 利用者均衡モデル

2.1 UEの定式化

2.2 UEの解法

2.3 システム最適配分と混雑課金

3 確率的利用者均衡モデル

3.1 SUEの定式化

3.2 SUEの解法

3.3 確率的配分の解法

目標：

1. 均衡配分とは何かを理解する
2. UEの定式化と基本的な解法を理解する
3. SUEの定式化と基本的なアルゴリズムを知る

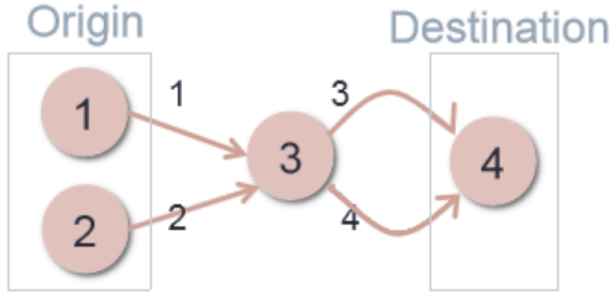
2.1 UEの定式化

■ 変数の定義

A : リンク集合
 Ω : ODペア rs の集合
 K_{rs} : ODペア rs 間の有効経路集合
 q_{rs} : ODペア rs 間の分布交通量
 $\delta_{a,k}^{rs}$: ODペア rs 間のパス k がリンク a を含むか否か。
 (TRUE=1, FALSE=0)

OD表(行列 Q) :

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix}$$



c_k^{rs} : ODペア rs のパス k の旅行時間
 t_a : リンク a の旅行時間, x_a の関数

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a(x_a) \delta_{a,k}^{rs}$$

f_k^{rs} : ODペア rs 間のパス k の流量 ($k \in K_{rs}, rs \in \Omega$)
 x_a : リンク a の流量

(右上の具体例)
 リンク集合 : $A = \{1,2,3,4\}$
 ODペア集合 : $\Omega = \{(1,4), (2,4)\}$

ODペア (1,4) について,
 パス1: リンク1 → リンク3
 パス2: リンク1 → リンク4
 とすると,

$$c_1^{14} = t_1 \delta_{1,1}^{14} + t_2 \delta_{2,1}^{14} + t_3 \delta_{3,1}^{14} + t_4 \delta_{4,1}^{14} = t_1 + t_3$$

$$x_3 = f_1^{14} \delta_{3,1}^{14} + f_2^{14} \delta_{3,2}^{14} + f_1^{24} \delta_{3,1}^{24} + f_1^{24} \delta_{3,1}^{24} = f_1^{14} + f_1^{24}$$

$$q_{14} = f_1^{14} + f_2^{14}$$

経路交通量 f_k^{rs} が分かれば, リンク交通量 x_a や経路コスト c_k^{rs} は出せる!

2.1 UEの定式化

■ Wardropの等時間原則(UE)の定式化

f_k^{rs} : ODペア rs 間のパス k の流量
 c_k^{rs} : ODペア rs のパス k の旅行時間
 q_{rs} : ODペア rs 間の分布交通量

UE/FD

$$f_k^{rs} > 0 \text{ のとき } c_k^{rs} = c_{min}^{rs} \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$f_k^{rs} = 0 \text{ のとき } c_k^{rs} \geq c_{min}^{rs} \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega \quad \text{流量保存則}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega \quad \text{流量は非負}$$

利用される経路の旅行時間は皆等しく

利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい

c_{min}^{rs} : ODペア rs 間の最小経路の所要時間

現実規模のネットワークでこの解を得るのは非常に困難…

Beckmann & Winsten (1956)

最適化問題に等価変換できる！

最適化問題であれば（ある程度）解法が確立しているので効率的に解ける。

2.1 UEの定式化

■ UEの等価最適化問題への変換

UE/FD-Primal

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw$$

s.t.

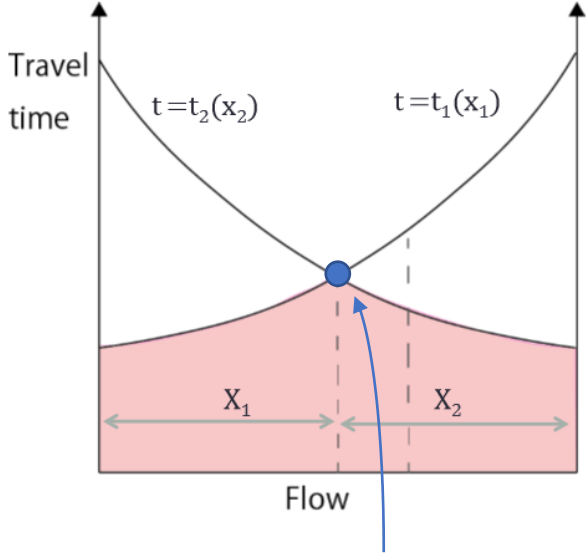
$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

$t_a(x_a)$: リンク a の旅行時間
 x_a : リンク a の流量
 f_k^{rs} : ODペア rs 間のパス k の流量
 q_{rs} : ODペア rs 間の分布交通量
 $\delta_{a,k}^{rs}$: ODペア rs 間のパス k がリンク a を含むか否か。(TRUE=1, FALSE=0)
 c_k^{rs} : ODペア rs のパス k の旅行時間



均衡点：積分の値が最小となる点

十分性の証明(次頁)：
 UE-FD/PrimalのKKT条件がUE/FDの均衡条件と一致

解の一意性：
 実行可能領域が凸 (∵ 制約条件式がすべて線形)
 目的関数が狭義凸 (⇔ Hessian $\nabla^2 Z$ が正定値行列) (∵ リンクコスト関数が単調増加)

2.1 UEの定式化

■ UE/FD-Primalの積分はどこから？

x_i : 戦略*i*をとるエージェント数
 $F_i(\mathbf{x})$: 集団状態 \mathbf{x} での戦略*i*の利得

ポテンシャル・ゲーム

各エージェントが戦略*i* ∈ \mathcal{S} を選択 → 集団状態 $\mathbf{x} = \{x_i\}$
 → 利潤ベクトル $\mathbf{F} = \{F_i(\mathbf{x})\}$

以下を満たすようなポテンシャル関数 $f(\mathbf{x})$ が存在するゲームを**ポテンシャル・ゲーム**という。

$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ → 成分表示 : $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x})$

ポテンシャル・ゲームにおいて、

ポテンシャル関数 $f(\mathbf{x})$ の最大化問題のKKT条件 ⇔ Nash均衡

Prop.2の等価最適化問題は、「**交通量配分問題をポテンシャル・ゲームと捉えて、ポテンシャル関数最大化問題を解くことでNash均衡を求めている**」ということ！

Prop.2の目的関数 : $\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw$

リンクパフォーマンス関数が他のリンクの交通量にも依存する場合、最適化問題への置換が出来ない！

ポテンシャル関数の存在条件 :

利潤関数のヤコビ行列 $\nabla \mathbf{F}$ が対称行列 → 成分表示 : $\frac{\partial F_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$





2.1 UEの定式化

■ UE/FD-Primalの十分性の証明

Lagrange関数： $L(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = Z(\mathbf{x}(\mathbf{f})) - \sum_r \sum_s \lambda_{rs} \left\{ \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} \right\} \quad f_k^{rs} \geq 0$

KKT条件（一次の最適性条件）：

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k^{rs} \frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \\ f_k^{rs} \geq 0 \\ \frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \end{array} \right.$$

フロー保存則

$$\sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0$$

Wardropの第一原則

最短所要時間

$$\begin{array}{ll} f_k^{rs} > 0 \text{ のとき} & c_k^{rs} = \lambda_{rs} \equiv c_{min}^{rs} \\ f_k^{rs} = 0 \text{ のとき} & c_k^{rs} \geq \lambda_{rs} \equiv c_{min}^{rs} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} &= \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left\{ \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw \right\} - \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left[\sum_r \sum_s \lambda_{rs} \left\{ \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} \right\} \right] \\ &= \sum_a \frac{d}{dx_a} \left\{ \int_0^{x_a} t_a(w) dw \right\} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial f_k^{rs}} - \lambda_{rs} \\ &= \sum_a \underbrace{t_a(x_a)}_{\text{経路所要時間 } c_k^{rs}} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial f_k^{rs}} - \lambda_{rs} \\ &= \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left\{ \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \right\} = \delta_{a,k}^{rs} \end{aligned}$$

2.2 UEの解法

■ 準備：all-or-nothing配分

リンクコストが流量に依存しない(**flow-independent**な)場合の解法
最短経路探索 → 最小費用経路へ全需要配分を全ての起点に対して実行。

Step 1 $n = 0$ とする。すべてのリンク交通量 x_{ij} について $x_{ij} = 0$ とする。

Step 2 n 番目の起点(セントロイド)を o とする。起点 o から他のすべてのノードへ最短経路探索を行い、起点 o から他のすべてのノードへの最短経路費用 $\{C_{min}[o \rightarrow i]\}$ と各ノード i に対する先行ポインタ F_i を求める。

Step 3 $\{C_{min}[o \rightarrow j]\}$ の降順(o から遠い順)にノード j を考える。ノード j に流入し、かつ最短経路ツリーに含まれるリンク $i(= F_j) \rightarrow j$ の交通量 x_{ij} を次式で改訂する。

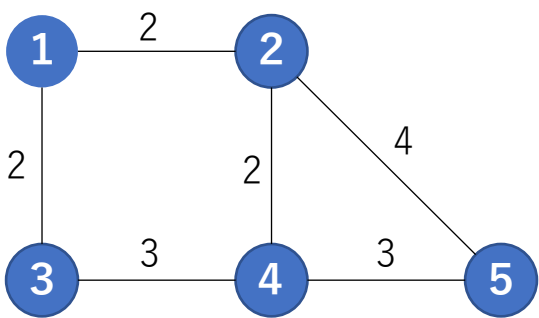
$$x_{ij} = x_{ij} + \left(q_{oj} + \sum_{m \in O_j} x_{jm} \right)$$

ただし、 O_j はノード j から流出するリンクの終点集合、 q_{oj} は起点 o から終点 j までの分布交通量。

Step 4 $n = N$ (ノード数)なら終了。そうでなければ $n = n + 1$ としStep 2へ。

2.2 UEの解法

■ all-or-nothing配分の例

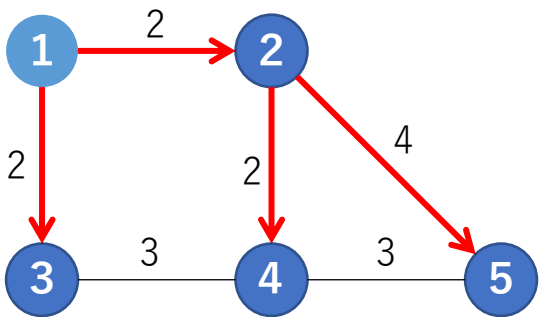


▲ NW図. 値はリンクコスト(定数)

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

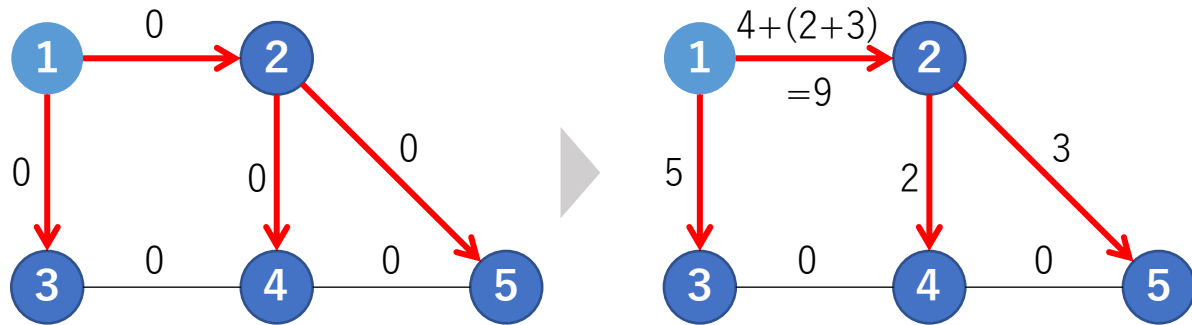
▲ OD表

ノード1に着目して最短経路探索



▲ ノード1から最短経路探索

流量の更新



▲ 流量の更新. 最短経路に全流量を流す. 遠くのリンクから流量を確定させる.

➤ この操作を全起点に対して行う.

2.2 UEの解法

Frank-Wolfe法の概要

解きたい問題：

UE/FD-Primal

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

▽
凸計画問題

➤ どのように降下方向を決めるか？

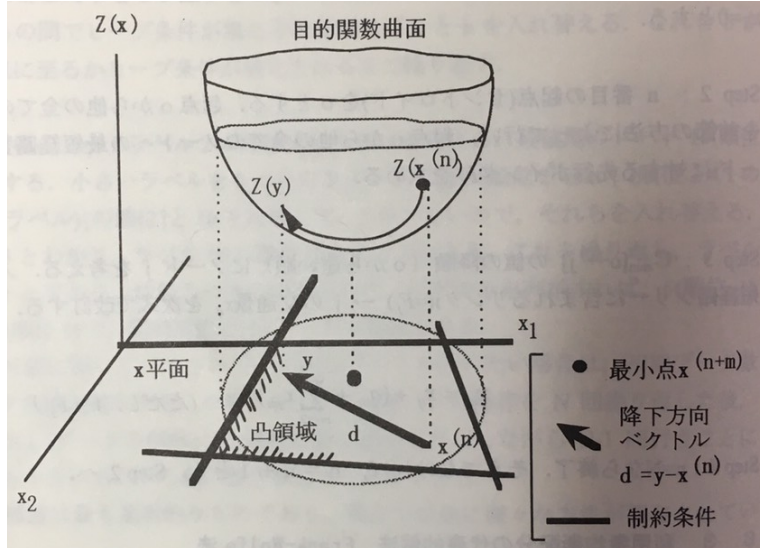
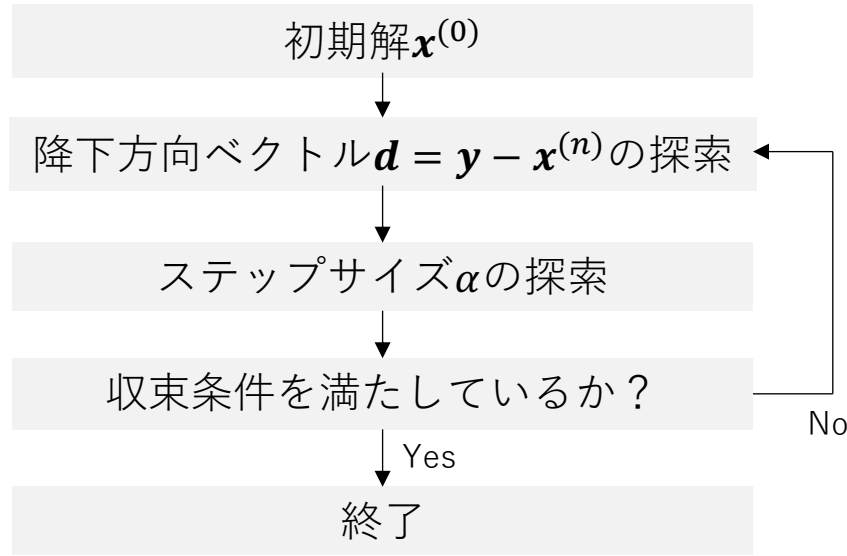


図-8.6 制約条件と方向ベクトル(y-x)と目的関数上の動き

2.2 UEの解法

- 点 $\mathbf{x}^{(n)}$ における降下方向ベクトル $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$ の探索法

目的関数 $Z(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}^{(n)}$ で線形近似し、 $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d}$ での目的関数の近似値 $Z'(\mathbf{y})$ を最小化する降下方向 \mathbf{d} を決定

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{y}) &\simeq Z'(\mathbf{y}) = Z(\mathbf{x}^{(n)}) + \nabla Z(\mathbf{x}^{(n)})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}) \\ &= Z_p(\mathbf{x}^{(n)}) + \sum_{a \in A} (y_a - x_a^{(n)}) \frac{\partial Z(\mathbf{x}^{(n)})}{\partial x_a^{(n)}} \\ &= Z_p(\mathbf{x}^{(n)}) + \sum_{a \in A} (y_a - x_a^{(n)}) t_a(x_a^{(n)}) \\ &= \underbrace{Z_p(\mathbf{x}^{(n)})}_{\text{定数}} - \sum_{a \in A} \underbrace{x_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)})}_{\text{定数}} + \sum_{a \in A} y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)}) \end{aligned}$$

以下の補助問題を解いて \mathbf{y} を出せば良い。

$$\min Z'(\mathbf{y}) = \sum_{a \in A} y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)}) \quad \text{s. t.} \quad \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0, \quad y_a = \sum_{r \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

2.2 UEの解法

- all-or-nothing配分による降下方向ベクトル $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$ の決定

補助問題

$$\min Z'(\mathbf{y}) = \sum_{a \in A} y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)}) \quad s.t. \quad \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0, \quad y_a = \sum_{r \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$t_a(x_a^{(n)}) = \text{const.}$ のもとで総旅行時間を最小とする \mathbf{y} を求める

$t_a(x_a^{(n)})$ のリンク所要時間で求められる最短経路に、すべてのOD交通量を流す
all-or-nothing配分により $Z'(\mathbf{y})$ を最小にする \mathbf{y} が得られる

降下方向ベクトル $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$ が求まる

簡単なアルゴリズムであるall-or-nothing配分を繰り返して用いることにより、
降下方向を確定できる！

2.2 UEの解法

■ Frank-Wolfe法のアルゴリズム

Step 1 初期実行可能解の設定

交通量0におけるall-or-nothing配分により、初期実行可能解となるリンク交通量 $\{x_a^{(n)}\}$ を与える($n = 1$).

Step 2 リンクコストの更新

$\{x_a^{(n)}\}$ に対する所要時間 $\{t_a(x_a^{(n)})\}$ を計算.

Step 3 降下方向ベクトルの探索

all-or-nothing配分により全交通需要をリンクに負荷. $\{y_a\}$ を求める.

Step 4 ステップサイズの探索

交通量の更新: $x_a^{(n+1)} = x_a^{(n)} + \alpha^{(n)} d_a^{(n)} = x_a^{(n)} + \alpha^{(n)} (y_a - x_a^{(n)})$

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} Z(\alpha) = \sum_a \int_0^{x_a^{(n+1)}} t_a(w) dw \quad \blacktriangleright \quad \text{一変数関数の最小化(積分は予め計算しておく)!}$$

によりステップサイズ $\alpha^{(n)}$ とリンク交通量 $x_a^{(n+1)}$ を求める.

Step 5 収束判定

満たしていれば計算終了, 満たしていなければ $n = n + 1$ としてStep2へ.
収束判定は総旅行時間変化, 交通量変化, 反復回数などで設定.

2.2 UEの解法

■ Frank-Wolfe法のまとめと補足

特徴

- ◎必要な記憶容量が少ない
- ◎手順が簡単
- ×収束が進むと解の近傍で”ジグザグ運動” → **収束スピードが緩慢**

改良手法

打ち切り二次計画法

目的関数のTaylor展開の二次の項まで用いる

Simplicial Decomposition法

均衡解を端点解(all-or-nothing配分)の凸結合(重みつき重ね合わせ)と捉え, それらのウェイトを求める

補足

リンクに容量制約がある問題では, ステップサイズ探索時に以下の制約条件を追加.

$$\alpha \leq \alpha_{max} = \min_{x_a < y_a} \left\{ \left(C_a - x_a^{(n)} \right) / \left(y_a - x_a^{(n)} \right) \right\}$$



2.2 UEの解法

■ 打ち切り二次計画法

探索方向ベクトル $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$ をTaylor展開の二次の項まで考慮して求める。

$$\min_{\mathbf{y}} Z(\mathbf{y}) = \underbrace{Z(\mathbf{x}^{(n)})}_{\text{定数}} + \underbrace{\nabla Z(\mathbf{x}^{(n)})^T}_{\parallel [\dots, t_a(x_a^{(n)}), \dots]^T} (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \underbrace{\nabla^2 Z(\mathbf{x}^{(n)})}_{\parallel \text{diag}[m_a(x_a^{(n)})]} (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)})$$

$m_a \equiv \frac{dt_a}{dx_a}$

$\nabla^2 Z$ が対角行列であるから、リンクごとに分解できる。

UE/FD-QP

$$\min_{\mathbf{y}} Z'(\mathbf{y}) = \sum_{a \in A} t_a^{(n)} (y_a - x_a^{(n)}) + \frac{1}{2} \sum_{a \in A} m_a^{(n)} (y_a - x_a^{(n)})^2$$

$$s. t. \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0, \quad y_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$t_a^{(n)} \equiv t_a(x_a^{(n)})$
 $m_a^{(n)} \equiv m_a(x_a^{(n)})$

この補助問題UE/FD-QPを解いて探索方向 \mathbf{d} を求める



2.2 UEの解法

■ 打ち切り二次計画法

補助問題UE/FD-QPをFrank-Wolfe法で解く。

UE/FD-QP を解くための m 回目反復におけるtemporaryな解 $\mathbf{y}^{(m)}$ で線形近似し、補助問題の補助問題UE/FD-QP-subを考えて探索方向を決定。

UE/FD-QPは近似的に解けば十分。反復回数 m は $\min\{4, \frac{n}{3}\}$ とすると効率的らしい。

UE/FD-QP-sub

$$\min_{\tilde{\mathbf{y}}} Z''(\tilde{\mathbf{y}}) = \sum_{a \in A} \{t_a^{(n)} + m_a^{(n)} \cdot (y_a^{(m)} - x_a^{(n)})\} \cdot \tilde{y}_a$$

$$s. t. \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0, \quad \tilde{y}_a = \sum_{r \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$t_a^{(n)} + m_a^{(n)} \cdot (y_a^{(m)} - x_a^{(n)})$ を各リンクコストとみなすと、all-or-nothing配分により容易に $\tilde{\mathbf{y}}$ が得られる。



2.2 UEの解法

■ 打ち切り二次計画法

Step 0 初期実行可能解の設定

繰り返し回数 $n = 0$, リンクコスト $t_a^{(0)} = t_a(0); \forall a \in A$
適当な初期実行可能解を求め, $\mathbf{x}^{(0)}$ とする.

Step 1 リンクコスト等の改訂

$t_a^{(n)} = t_a(x_a^{(n)}), m_a^{(n)} = m_a(x_a^{(n)}); \forall a \in A$

Step 2 補助問題UE/FD-QPを近似的に解く

$\mathbf{t}^{(n)}, \mathbf{m}^{(n)}$ に対する補助問題UE/FD-QPを近似的に解き, その配分結果のリンク交通量パターンを \mathbf{y} とする(詳細は次頁).

Step 3 降下方向ベクトルを求める

降下方向ベクトル $\mathbf{d}^{(n)}$ を計算: $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$

Step 4 一次元探索

ステップサイズ α に関する次の一次元最適化問題を解く.
 $\min Z(\mathbf{x}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)})$ s. t. $0 \leq \alpha \leq 1$; ただし, Z はUE/FD-Primalの目的関数.

Step 5 解の改訂

リンク交通量ベクトルの改訂: $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$

Step 6 収束判定

収束していれば終了. そうでなければ $n = n + 1$ としてStep.1へ



2.2 UEの解法

■ 打ち切り二次計画法

Step 2.0 補助問題UE/FD-QPを解くための初期設定
 $m = 0, \mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{x}^{(n)}$

Step 2.1 補助リンクコストの改訂
 $\tilde{t}_a^{(m)} = t_a^{(n)} + m_a^{(n)} \cdot (y_a^{(m)} - x_a^{(n)}) ; \forall a \in A$

Step 2.2 補助問題の線形化問題UE/FD-QP-subを解き探索ベクトル決定
リンクコスト $\tilde{t}_a^{(m)}$ に対する最短経路配分を行い、その配分結果を $\tilde{\mathbf{y}}$ とする。これにより、降下方向ベクトル $\mathbf{p}^{(m)}$ を計算： $\mathbf{p}^{(m)} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^{(m)}$

Step 2.3 一次元探索
ステップサイズ α に関する次の一次元最適化問題を解く。
 $\min Z'(\mathbf{y}^{(m)} + \alpha \mathbf{p}^{(n)})$ s. t. $0 \leq \alpha \leq 1$; ただし、 Z' は補助問題UE/FD-QPの目的関数。

Step 2.4 解の改訂
補助リンク交通量ベクトルの改訂： $\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{y}^{(m)} + \alpha \mathbf{p}^{(m)}$

Step 2.5 繰り返し打ち切り判定
 $m = \min \left\{ 4, \frac{n}{3} \text{に最も近い整数} \right\}$ なら補助問題の繰り返しを打ち切り、 $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(m+1)}$ とした後、Step.3へ戻る。そうでなければ、 $m = m + 1$ としてStep2.1へ。



2.2 UEの解法

■ Simplicial Decomposition法

UE/FD-Primalの制約領域は凸集合 → 解は凸集合内の点

凸集合 $S \subset R^{M-1}$ 内の任意の点 \mathbf{x} は、凸集合の高々 M 個の端点 $\mathbf{e}_i (i = 1, \dots, M)$ の凸結合として表現できる。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, M)$$

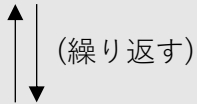
すべてのall-or-nothing配分パターン $\mathbf{e}_i (i = 1, \dots, M)$ が仮に所与であれば、UE/FD-Primalは λ に関する以下の最適化問題として表現できる。

$$\min_{\lambda} Z(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, M)$$

だが、現実では、すべての端点を列挙することは不可能/非効率…



列生成フェイズ：最適解の表現に用いられる可能性の高い端点を生成し、端点集合に追加



限定親問題フェイズ：その(部分的な)端点集合内の凸結合によって元の問題を表現し解く

実際は、それでも端点記憶に必要なメモリは膨大なので、記憶する端点の個数に上限を設け、端点の削除/入れ替えを組み合わせる(RSD: Restricted Simplicial Decomposition).

Frank-Wolfe法はRSD法において記憶する端点個数の上限値を1とおいた特殊ケース。



2.2 UEの解法

■ Simplicial Decomposition法

Step 0 初期設定

繰り返し回数 $m := 0$, $E^{(m)}$ の要素数の上限値 M を設定, 初期許容リンク交通量パターン $\{\mathbf{x}^{(0)}\}$ を設定, 初期端点集合 $E^{(0)} := \text{null}$, $F^{(0)} := \{\mathbf{x}^{(0)}\}$.

Step 1 端点生成・削除(column generation and dropping)フェイズ

Step 1.1 以下の補助問題(最短経路配分)を解く :

$$\min_{\mathbf{y}} \sum_{a \in A} t_a(x_a^{(m)}) y_a \quad \text{s.t. } \mathbf{y} \in \Omega_p$$

Ω_p : フロー保存条件を満たしたリンク交通量パターンの集合

Step 1.2 もし, $\mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(m)}) \geq 0$ なら終了. $\mathbf{x}^{(m)}$ が均衡解. そうでなければ Step.1.3 へ.

Step 1.3 もし, $|E^{(m)}| < M$ (i.e. $E^{(m)}$ に含まれる端点の個数が M 未満) なら, $E^{(m+1)} := E^{(m)} \cup \{\mathbf{y}\}$, $F^{(m+1)} := F^{(m)}$ とする. そうでなければ (i.e. $|E^{(m)}| = M$), $E^{(m)}$ の要素の中で $\mathbf{x}^{(m)}$ を表す凸結合の重み λ_i が最小となっている要素を $\{\mathbf{y}\}$ と入れ替えた端点集合を $E^{(m+1)}$ とし, $F^{(m+1)} := \{\mathbf{x}^{(m)}\}$.

Step 1.4 $\hat{E}^{(m+1)} := E^{(m+1)} \cup F^{(m+1)}$



2.2 UEの解法

■ Simplicial Decomposition法

Step 2 限定親問題(restricted master problem)フェイズ

Step 2.1 UE/FD-Primalにおけるリンク交通量パターン $\mathbf{x}^{(m+1)}$ を $\mathbf{e}_i \in \hat{E}^{(m+1)}$ の凸結合により表現した以下の最適化問題を λ について解く：

$$\min_{\lambda} Z(\mathbf{x}^{(m+1)}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{\hat{M}} \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \sum_{i=1}^{\hat{M}} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, \hat{M})$$

ここで、 $\mathbf{e}_i \in \hat{E}^{(m+1)}$ 、 $\hat{M} : \hat{E}^{(m+1)}$ の要素数.

Step 2.2 $\lambda_i = 0$ となっているすべての \mathbf{e}_i を $E^{(m+1)}$ および $F^{(m+1)}$ から削除.

Step 2.3 $m := m + 1$ としてStep 1へ.

Step2の最適化問題は厳密に解く必要はなく、現在得られているtemporaryな解で二次近似した問題を解けば良い.

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} Z'(\mathbf{x}) &= \sum_{a \in A} t_a^{(m)} (x_a - x_a^{(m)}) + \frac{1}{2} \sum_{a \in A} m_a^{(m)} (x_a - x_a^{(m)})^2 \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{\hat{M}} \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \sum_{i=1}^{\hat{M}} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, \hat{M}) \end{aligned}$$

2.3 システム最適配分と混雑課金

■ SO(Wardropの第二原則)の定式化

SO-Primal

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} x_a t_a(x_a)$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

UE/FD-Primal

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw$$

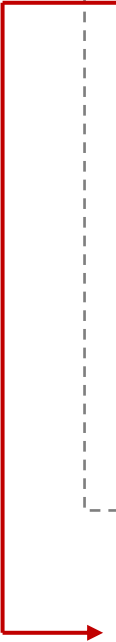
s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$



道路網上の総旅行時間が最小

UE/FD-Primalから目的関数が変わるだけ。
UEと全く同じアルゴリズムで計算できる。

- $t_a(x_a)$: リンク a の旅行時間
- x_a : リンク a の流量
- f_k^{rs} : ODペア rs 間のパス k の流量
- q_{rs} : ODペア rs 間の分布交通量
- $\delta_{a,k}^{rs}$: ODペア rs 間のパス k がリンク a を含むか否か。(TRUE=1, FALSE=0)
- c_k^{rs} : ODペア rs のパス k の旅行時間

2.3 システム最適配分と混雑課金

■ UEとSOの関係・混雑課金

私的限界費用

1人の利用者が道路に加わる時にその個人が支払うコスト, $t(x)$

社会的限界費用

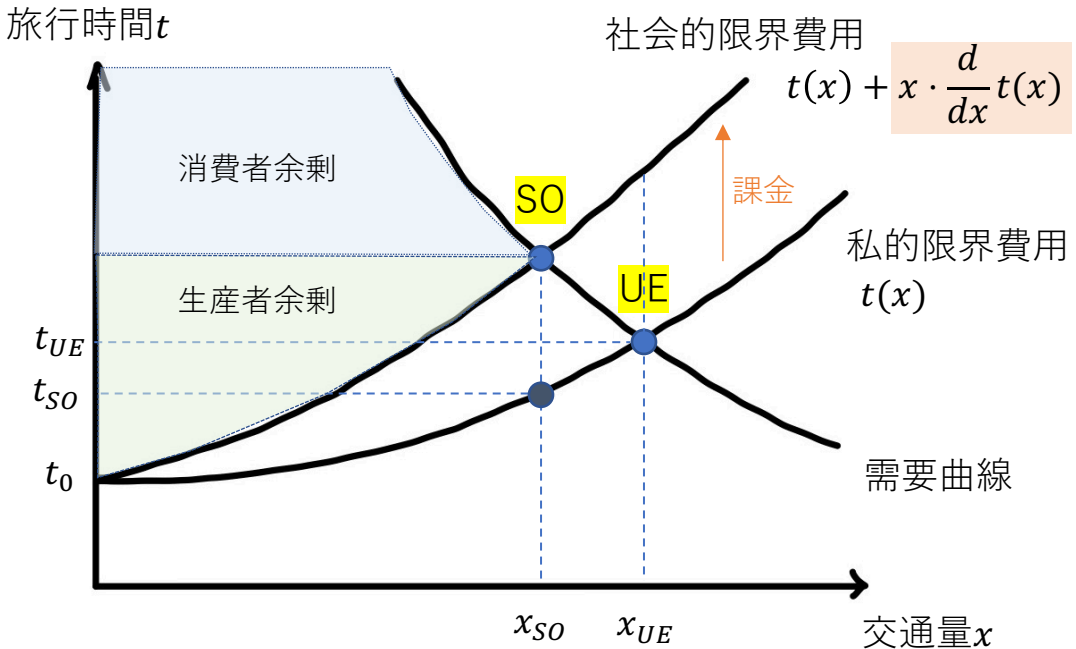
1人の利用者が道路に加わる時の総所要時間の増加分

総所要時間の微分

$$\frac{d}{dx}(xt(x)) = t(x) + x \cdot \frac{d}{dx}t(x) \quad (*)$$

社会的余剰 = 消費者余剰 + 生産者余剰：
需要曲線と社会的限界費用とで挟まれた部分の面積

SOで社会的余剰最大, UEでは供給過多



(*)の第二項の分を混雑課金することでUEをSOに一致させられる。

補足. BraessのParadox, Smithのパラドクス(参考: 青本5.3節)

3 確率的利用者均衡モデル

1 均衡配分

1.1 交通量配分

1.2 均衡の概念

1.3 交通ネットワークの記述

2 利用者均衡モデル

2.1 UEの定式化

2.2 UEの解法

2.3 システム最適配分と混雑課金

3 確率的利用者均衡モデル

3.1 SUEの定式化

3.2 SUEの解法

3.3 確率的配分の解法

目標：

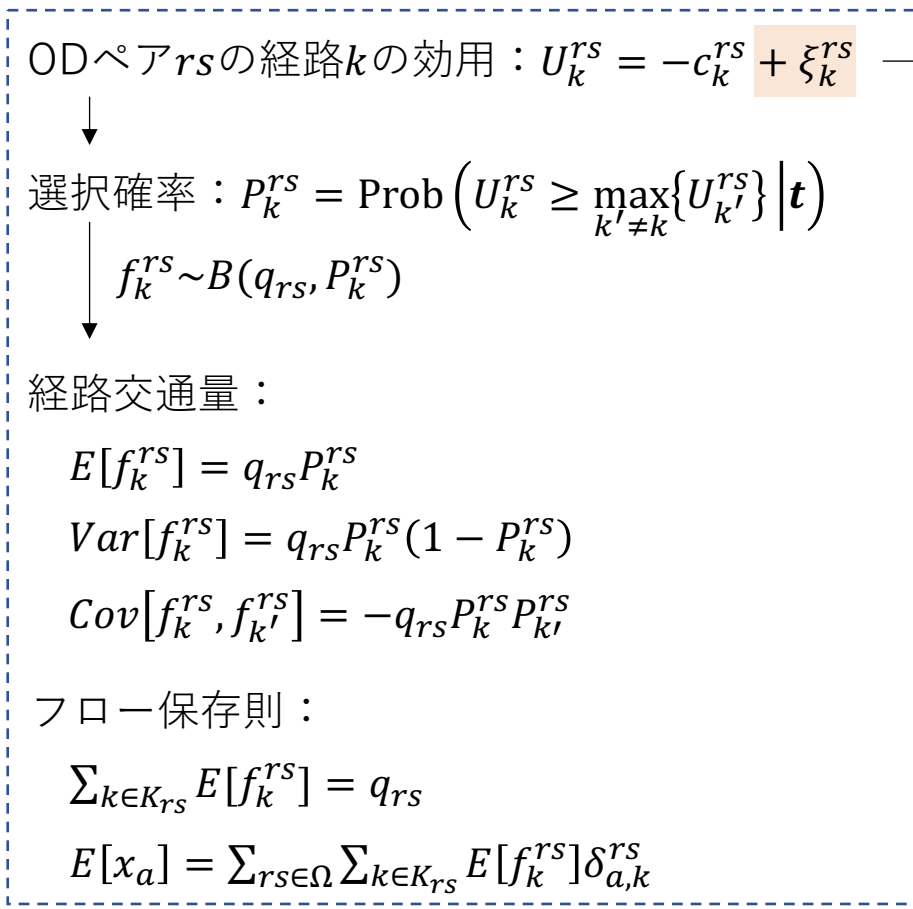
1. 均衡配分とは何かを理解する
2. UEの定式化と基本的な解法を理解する
3. SUEの定式化と基本的なアルゴリズムを知る

3.1 SUEの定式化

■ 定式化の一般論

確率的利用者均衡 (SUE; Stochastic User Equilibrium assignment)

どの利用者也経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することができな
いと信じている均衡状態。



ξ_k^{rs} : 誤差項 (r.v.)

ex) *i.i.d.* ガンベル分布 → **ロジットモデル**

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp(-\theta c_{k'}^{rs})} \quad (*)$$

$\theta \rightarrow \infty$: 確定的, $\theta = 0$: ランダム

K_{rs} の設定 :

- Simple path (同一リンクを二度以上通過しない) 集合
- Simple path からサンプリング
- 経路を限定しない

▶ UE 同様, 最適化問題に置換して解く

* 以降, 期待値記号を省略する

3.1 SUEの定式化

■ ロジット型SUEの等価最適化問題

SUE/FD-path

$$\min Z(\mathbf{f}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) dw - \frac{1}{\theta} \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{f}^{rs})$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$H_{rs}(\mathbf{f}^{rs}) \equiv - \sum_{k \in K_{rs}} P_k^{rs} \ln P_k^{rs} = - \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}$$

エントロピー項

→ $\theta \rightarrow \infty$ で消えてUEと一致
この項の由来は次頁以降

$t_a(x_a)$: リンク a の旅行時間
 x_a : リンク a の流量
 f_k^{rs} : ODペア rs 間のパス k の流量
 q_{rs} : ODペア rs 間の分布交通量
 $\delta_{a,k}^{rs}$: ODペア rs 間のパス k がリンク a を含むか否か. (TRUE=1, FALSE=0)
 c_k^{rs} : ODペア rs のパス k の旅行時間

十分性の証明：
SUE/FD-pathのKKT条件が前項のロジットの選択式(*)と一致する。

解の一意性：
実行可能領域が凸 (:: 制約条件式がすべて線形)
目的関数が狭義凸 (:: リンクコスト関数が単調増加 + エントロピー関数が狭義凸)



3.1 SUEの定式化

■ エントロピー・モデル

Flow-independentな状況下で**ロジットモデルと等価**なモデル

経路交通量パターン f ← 各利用者の選択結果の組み合わせ：**状態**
(ひとつの f に対してそれを実現する状態は複数ある)

仮定：全状態が等確率で生起

→ 確率的に最も起こりやすい経路交通量 f^* は、対応する状態数 $N(f)$ が最大となるもの

$$N(f) = \prod_r \prod_s q_{rs} C_{f_1^{rs}} q_{rs-f_1^{rs}} C_{f_2^{rs}} q_{rs-f_1^{rs}-f_2^{rs}} C_{f_3^{rs}} \cdots f_{K_{rs}}^{rs} C_{f_{K_{rs}}^{rs}} = \prod_r \prod_s \frac{q_{rs}!}{\prod_k f_k^{rs}!}$$

$$\rightarrow \max_f \ln N(f) = \sum_r \sum_s \left(\ln q_{rs}! - \sum_k \ln f_k^{rs}! \right) \underset{\substack{\text{Stirling公式, } q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}}}{\sim} \sum_r \sum_s \left(\underbrace{q_{rs} \ln q_{rs}}_{\text{定数}} - \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \right)$$

↓
最大化

$$\rightarrow f^* = \arg \max_f Z(f) = - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

f を確率に置き換えると、情報理論におけるShannonエントロピー



3.1 SUEの定式化

■ エントロピー最大化モデル

SA-1 エントロピー最大化モデル

$$\max_f Z(f) = - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$$s.t. \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \tilde{E}, \quad q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}, \quad f_k^{rs} > 0$$

\tilde{E} : 総交通費用の最大値(観測値)を与える

経路選択確率 $\mathbf{P} \equiv [p_k^{rs} = \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}]$ の **エントロピー** $H_{rs}(\mathbf{P}) \equiv - \sum_k p_k^{rs} \ln p_k^{rs}$

$$Z(f) = \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\mathbf{P}) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs}$$

エントロピー最大化

最大値 : 全経路の選択確率が等しいとき ($\log K$)
 最小値 : ひとつの経路の選択確率が1で他がすべては0のとき (0)

(例) 最短経路配分はODペア rs に対して最短経路のみに配分するというエントロピーが小さい状態

- ・ 総交通費用 \tilde{E} の制約下で, ある程度ランダムな交通量パターンを生成するモデル
- ・ ロジットモデルと等価 (∵ KKT条件をとるとロジットの式(*)が得られる)
- ・ θ は \tilde{E} に応じてLagrange乗数として決まる
- ・ 解の一意性
 (∵ 目的関数が凸 ← $\nabla^2 H = \text{diag}(-1/P_i) < 0$)
 (∵ 制約領域が閉凸 ← 線形制約条件)
 (∵ 制約領域が有界 ← サイクリック経路を考慮しない)



3.1 SUEの定式化

■ エントロピー・モデルの他の形式

いずれもロジットモデルと等価

SA-2 コスト最小化モデル

$$\min_f Z(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs}$$

$$s.t. \quad -\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \geq \tilde{H}, \quad q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}, \quad f_k^{rs} > 0$$

\tilde{H} : エントロピーの最小値 (観測値)を与える

SA-3 エントロピー・コスト調和モデル

$$\min_f Z(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} + \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$$s.t. \quad q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}, \quad f_k^{rs} > 0$$

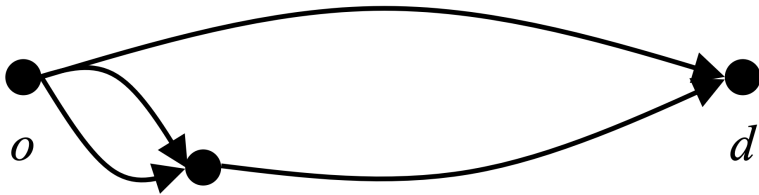
θ : 経路選択のばらつきを示すパラメータを与える

SUE/FD-pathの目的関数はエントロピー・コスト調和モデルとの類推で想定できる。

3.1 SUEの定式化

■ ロジットモデルの課題：IIA特性

経路重複



3経路の所要時間が同じなら交通量は1/3ずつ??



現実だと、上の経路と下の2経路とで半分ずつくらいになりそうだが…

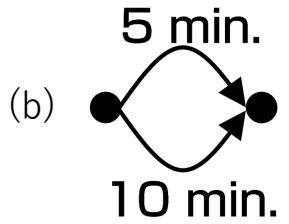
経路差のみに着目している



どちらも流れる交通量の比率は等しい??



現実だと、(a)の二経路はほとんど変わらないが、(b)の二経路は大きく違う気がするが…



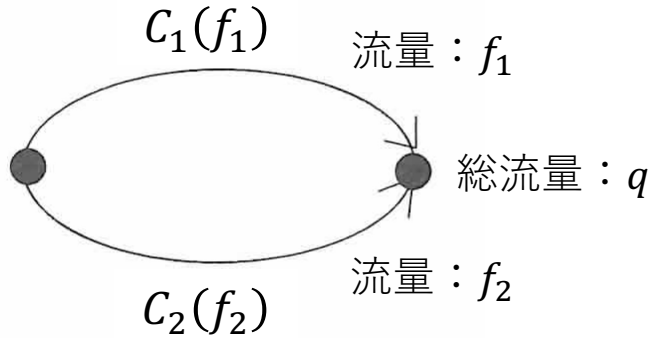
➤ 誤差項に多変量正規分布を仮定すれば解消される (Probitモデル)

計算量が膨大(感度分析がほとんど不可能)



3.1 SUEの定式化

■ UEとSUEの関係



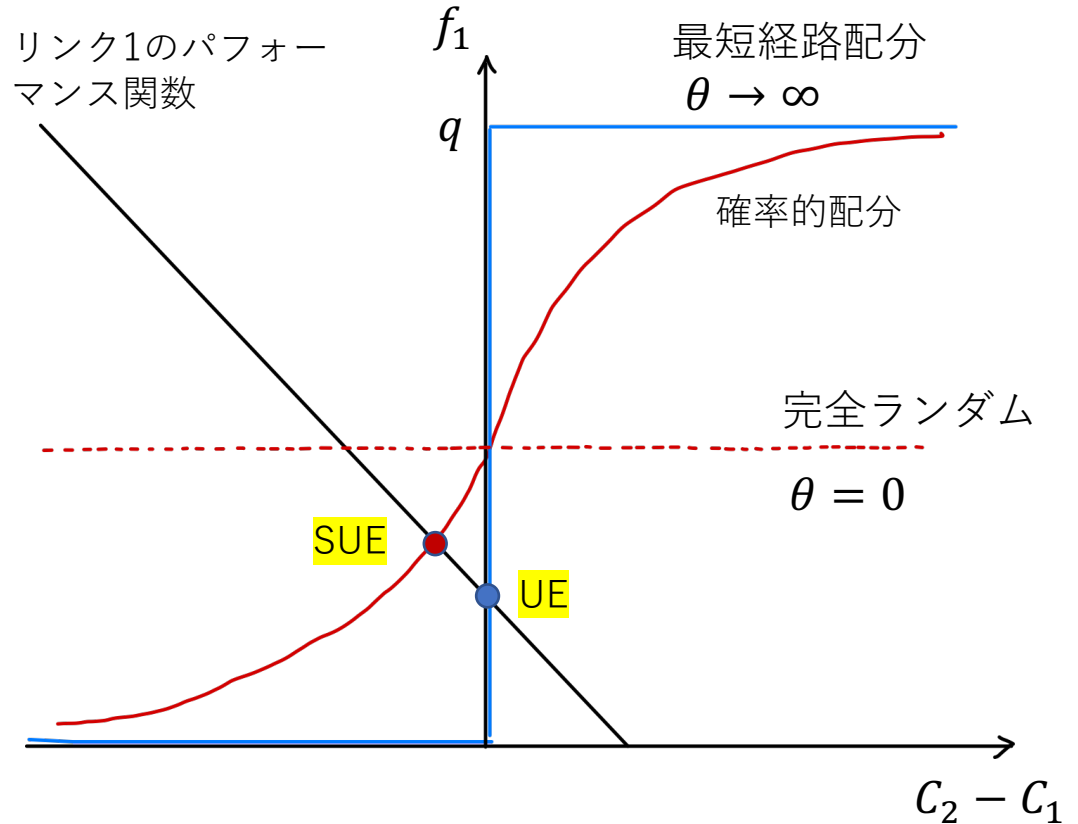
▲ NW例

リンクコスト関数： $C_i = A_i f_i + B_i$ ($i = 1, 2$)
 f_i ：リンク i の交通量
 A_i, B_i ：正值パラメータ

リンク1の性能関数：
 $C_2 - C_1 = -(A_1 + A_2)f_1 + (B_2 - B_1 + qA_1)$

リンク1の需要関数：

$$f_1 = q \cdot \frac{\exp[-\theta C_1]}{\exp[-\theta C_1] + \exp[-\theta C_2]} = \frac{q}{1 + \exp[-\theta(C_2 - C_1)]}$$



3.2 SUEの解法

■ 均衡配分の解法

SUEの等価最適化問題の解法

逐次平均法

- ◎各種経路選択モデルに対応
- ×収束が非常に遅い

部分線形化法

- ◎収束が非常に早い
- ・起点別リンク交通量を未知変数
- ・ロジット型SUEのみに対応

Simplicial Decomposition法

- ◎収束が非常に早い
- ・限定された経路交通量を未知変数
- ・ロジット型SUEのみに対応

■ 確率的配分の解法

Flow-independentな場合の配分手法

ロジット型確率的配分

Dialのアルゴリズム

- ◎経路列挙不要
- ×経路を限定

Markov連鎖配分

- ◎経路列挙不要
- ◎経路限定不要
- ×過大なcyclic flow
- ×IIA特性を増幅

プロビット型確率的配分

モンテカルロシミュレーション

計算過程でFlow-independentな場合の配分計算(確率的配分)が必要

3.2 SUEの解法

■ 逐次平均法(MSA : Method of Successive Averages)

Step 1 初期実行可能解の設定

交通量 0 における**確率的配分**により、初期実行可能解となるリンク交通量 $\mathbf{x}^{(n)}$ を与える($n = 1$).

Step 2 リンクコストの更新

$\mathbf{x}^{(n)}$ に対する所要時間 $t(\mathbf{x}^{(n)})$ を計算.

Step 3 降下方向ベクトルの探索

$t^{(n)}$ に対して**確率的配分**を行い $\mathbf{y}^{(n)}$ を求め、 $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n)}$ を得る.

Step 4 解の更新

$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$ で解を更新. ただし、ステップサイズは **$\alpha = \frac{1}{n}$ で固定.**

Step 5 収束判定

満たしていれば計算終了、満たしていなければ $n = n + 1$ としてStep2へ

なぜステップサイズ固定? → 目的関数に経路変数が含まれており、その値を評価できないから

確率的配分: Flow-independentな状況下での確率的配分(3.3節)

3.3 確率的配分の解法

- Dialのアルゴリズム：Flow-independentでロジットモデルと等価

O_i ：ノード i から流出するリンクの終点集合， I_i ：ノード i に流入するリンクの始点集合

Step 1 最短経路探索

起点 r から他のすべてのノードへの最小交通費用 $C(i)$ を計算

Step 2 全リンクについてリンク尤度 $L[i \rightarrow j]$ を計算

$$L[i \rightarrow j] = \begin{cases} \exp[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}] & ; c(i) < c(j) \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

Step 3 前進処理

起点 r から $c(i)$ の値の昇順 (r から近い順) にノードを考え、各ノード i から流出するリンクの **リンクウェイト** $W[i \rightarrow j]$ を計算：

$$W[i \rightarrow j] = \begin{cases} L[i \rightarrow j] & ; i = r \\ L[i \rightarrow j] \sum_{m \in I_i} W[m \rightarrow i] & ; otherwise \end{cases}$$

Step 4 後退処理

$c(i)$ の値の降順 (r から遠い順) にノードを考え、各ノード j に流入するリンクの交通量 x_{ij} を計算：

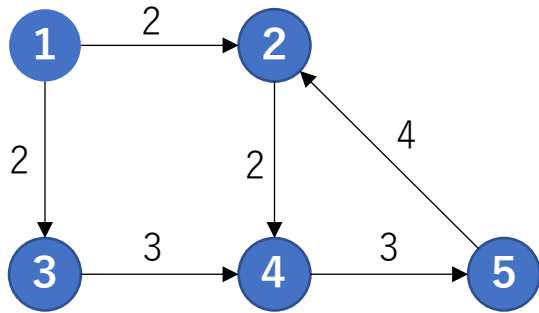
$$t_{ij} = \left(q_{rj} + \sum_{m \in O_j} x_{jm} \right) \frac{W[i \rightarrow j]}{\sum_{m \in I_j} W[m \rightarrow j]}$$



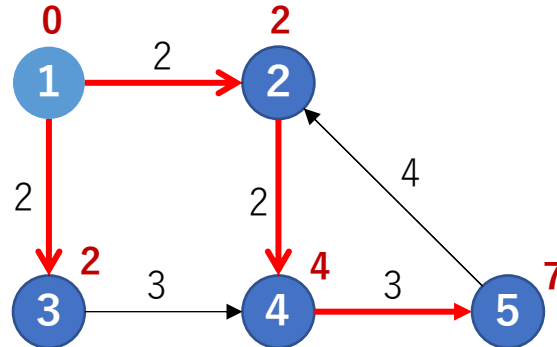
3.3 確率的配分の解法

■ Dialのアルゴリズムの例($\theta = 1$)

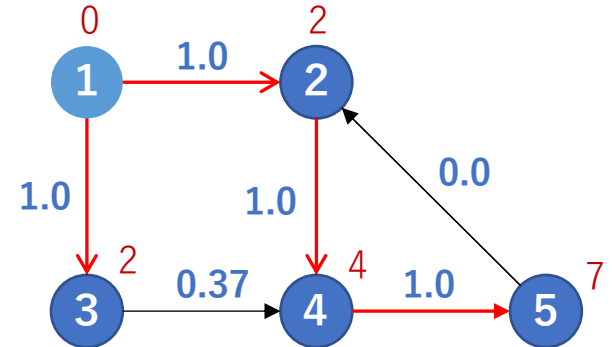
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3



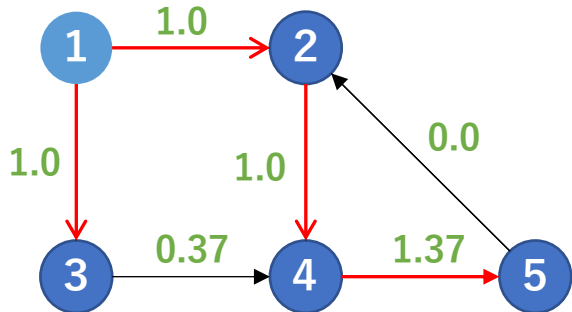
▲ NW図. 値はリンクコスト



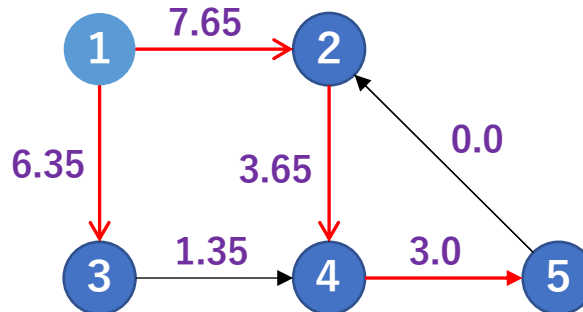
▲ Step1. ノード1から最短経路探索



▲ Step2. リンク尤度の計算
 最短経路上は尤度1
 後戻りするリンクは尤度0



▲ Step3. リンクウェイトの計算
 (リンク尤度) × (前リンクのウェイトの和)



▲ Step4. リンク交通量の計算

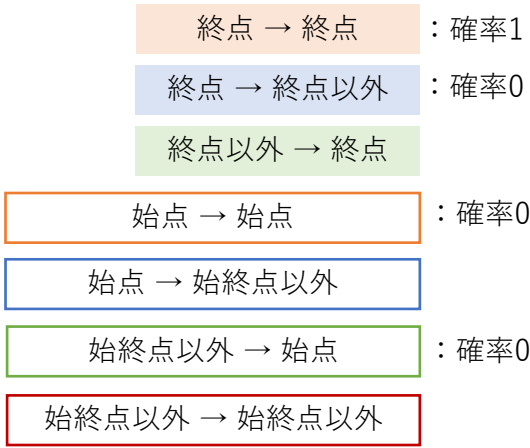
3.3 確率的配分の解法

Markov連鎖配分(MCA : Markov Chain Assignment)

Markov連鎖による配分モデル 佐佐木(1965)

g 個の起点, a 個の終点を含む n 個のノードからなるNW
ノード間遷移確率行列 P を所与とする

$$P = \begin{bmatrix} \overbrace{I}^a & \overbrace{0}^{n-a} \\ \overbrace{R}^a & \overbrace{Q}^{n-a} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{終点以外}} Q = \begin{bmatrix} \overbrace{0}^g & \overbrace{Q_1}^{n-g-a} \\ \overbrace{0}^g & \overbrace{Q_2}^{n-g-a} \end{bmatrix}$$



最初の時点でノード i にいた車が n 回遷移後にノード j にいる確率は Q^n の (i, j) 成分であるから, 起点から発生した車が各ノードにいる確率は,

各行が起点別ノード選択率ベクトル $\{P(i)\}$

$$I + Q^1 + Q^2 + \dots + Q^n + \dots = [I - Q]^{-1} = \begin{bmatrix} I & Q_1[I - Q_2]^{-1} \\ 0 & [I - Q_2]^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ノード i の選択率を $P(i)$ とすると, リンク ij の選択率 p_{ij} は, $p_{ij} = P(i) \cdot \underline{p(j|i)}$ (3.2)

ノード i から j への推移確率(Q の要素)

(注) Markov連鎖配分では, 配分経路対象を全く限定せず, cyclicも含むすべての経路を配分対象としている.

3.3 確率的配分の解法

■ Markov連鎖配分(MCA : Markov Chain Assignment)

ロジットモデルと整合的な遷移確率 Akamatsu(1996)

遷移確率を以下のように与えることで、MCAはロジット型確率配分と等価になる

$$p(j|i) = \exp[-\theta t_{ij}] \frac{V_{js}}{V_{is}} \quad ; \quad V_{is} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{is}] \quad \cdots Q \text{の要素} \quad (3.3)$$

(proof) ODペア rs 間の経路 k の選択確率は、

$$\begin{aligned} P_k^{rs} &= \prod_{ij} p(j|i)^{\delta_{ij,k}^{rs,n}} \\ &= \exp[-\theta \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,k}^{rs,n}] \exp \left[\sum_{ij} \left(\ln \frac{V_{js}}{V_{is}} \right) \delta_{ij,k}^{rs,n} \right] \\ &= \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{rs}]} \end{aligned}$$

ただし、 $\delta_{ij,k}^{rs,n} = \begin{cases} n & : \text{ODペア}rs\text{間の経路}k\text{がリンク}ij\text{を}n\text{回通過} \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$



3.3 確率的配分の解法

■ Markov連鎖配分(MCA : Markov Chain Assignment)

$$V_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\theta c_k^{ij}]$$

遷移確率の計算法

前頁の行列Vを求められれば配分できるが、無限個の経路を考慮する必要…

→ Vの値を行列演算で評価

重み行列 $W = [w_{ij}]$ を以下のように定義 \longrightarrow 冪乗 $W^n = (w_{ij}^{[n]})$

$$w_{ij} = \begin{cases} \exp[-\theta t_{ij}] & : \text{ノード } i, j \text{ 間にリンクが存在} \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_{ij}^{[n]} = \sum_{k \in K_n^{ij}} \exp[-\theta c_{k,n}^{ij}]$$

K_n^{ij} : n 本のリンクを通過してノード i と j を結ぶ経路の集合

$c_{k,n}^{ij}$: K_n^{ij} に属する k 番目の経路のコスト

$V = (V_{ij})$ は,

$$V = W + W^2 + \dots = [I - W]^{-1} - I \quad (3.4)$$

よって、ロジット型確率配分は以下のような手順で可能。

- Step1. (3.4)よりVを計算
- Step2. (3.3)より遷移確率Qを計算
- Step3. (3.1)よりノード選択率Pを計算
- Step4. (3.2)よりリンク選択率 p_{ij} を計算



ノード選択率 : $P^{rs}(i) = V_{ri}V_{is}/V_{rs}$
 リンク選択率 : $P_{ij}^{rs} = V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$
 リンク交通量 : $y_{ij}^{rs} = q_{rs}V_{ri}w_{ij}V_{js}/V_{rs}$



3.3 確率的配分の解法

■ Markov連鎖配分(MCA : Markov Chain Assignment)

計算上は、行列 V のうち $V_1 = [V_{ri}: r \in R, i \in N], V_2 = [V_{js}: j \in N, s \in S], V_3 = [V_{rs}: r \in R, s \in S]$ だけ分かれば十分。
 起点集合 : R , 終点集合 : S , 通過ノード集合 : N

Step 1 $W = [w_{ij}]$ の計算 :

$$w_{ij} = \exp[-\theta t_{ij}] ; \forall ij \in A$$

Step 2A $V_r = [V_{r1}, \dots, V_{rn}]$ の計算 $\rightarrow V_1$ 求まる :

各起点 $r \in R$ について、以下の線形連立方程式を解く。

$$[I - W]^T V_r^T = W_r^T ; W_r = [w_{r1}, \dots, w_{rn}]$$

Step 2B $V_s = [V_{1s}, \dots, V_{ns}]^T$ の計算 $\rightarrow V_2$ 求まる :

各終点 $s \in S$ について、以下の線形連立方程式を解く。

$$[I - W]V_s = W_s ; W_s = [w_{1s}, \dots, w_{ns}]^T$$

Step 3 $V_{rs} = [V_{rs}: r \in R, s \in S]$ の計算 :

$W_2 = [W_{is}: i \in N, s \in S]$ に対して,

$$V_3 = V_1 W_2$$

Step 4 ODペア別リンク交通量 y_{ij}^{rs} の計算 :

$$y_{ij}^{rs} = q_{rs} \frac{V_{ri} W_{ij} V_{js}}{V_{rs}} ; \forall ij \in A, \forall rs \in W$$

まとめ

1 均衡配分

UE, SUE, SO

リンクパフォーマンス関数

2 利用者均衡モデル

UEの定式化, 最適化問題への置換

all-or-nothing配分, Frank-Wolfe法, 打ち切り二次計画法, Simplicial Decomposition法

UEとSOの関係, 混雑課金

3 確率的利用者均衡モデル

SUEの定式化, 最適化問題への置換, ロジットモデル, IIA特性

逐次平均法(MSA), Dialのアルゴリズム, Markov連鎖配分

目標:

1. 均衡配分とは何かを理解する
2. UEの定式化と基本的な解法を理解する
3. SUEの定式化と基本的なアルゴリズムを知る

次回：大課題発表

5/12(火) 8:30-10:00 → 変更？

発表：B4の3人

大課題：

第一回で配布されたPPデータを用いて、MNL等によるパラメータ推定を行う。
また、推定したモデルで政策シミュレーションを行う。

以下の項目は発表資料に入るかと思えます。

- ・基礎集計の結果
- ・モデルの概要
- ・推定結果
- ・政策シミュレーションの結果