B4　近松京介

第3章　進化ゲーム

■戦略の適応度

個体がどのような戦略をとるかによって決まる，獲得できる利得量

■進化ゲームの枠組み

戦略の適応度に比例して．戦略を採用するようにプログラム

様々なタイプの戦略が存在していた個体群

特定の戦略が支配的

どのような性質を持つ戦略が生き残るのか

個体群の戦略分布がどのようなプロセスを経て均衡に至るのか

明らかになる

■個体群ダイナミクスとは

個体群の中　　　　個体群全体

様々な相互作用 ⇔ まとまった集団行動

個体群が特定の行動パターンをとっていると仮定！

個体群全体での大規模な相互作用の扱い ⇒ 容易

個体群での相互作用を一つのシステムとして扱う

これが個体群ダイナミクス！

個体群の規模増加 → 資源量減少 → 激しい競争

個体群の規模は自動的に調整される

■個体群の規模が調整される様相を表した式

N(t) : 時点tにおける個体数

K : 環境における個体群の収容力を表すパラメータ

$$\dot{N}(t) = \underbrace{\boxed{k\{1-(N(t)/K)\}}}_{\text{個体群の平均的な成長率}} N(t) \qquad k>0,\ K>0 \qquad (3.1)$$

同じ環境下で生活をしている二つの個体群を想定

■各個体群の規模の変化率

時点tにおけるx種の個体数をx(t), y種の個体数y(t)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F_x\{x(t), x(t)\} \\ \dot{y}(t) &= F_y\{x(t), y(t)\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

互いの成長率が相手個体群の成長率によって受ける影響

複数個体群の関係を3タイプに分類可能

共生関係　　競争関係　　寄生関係

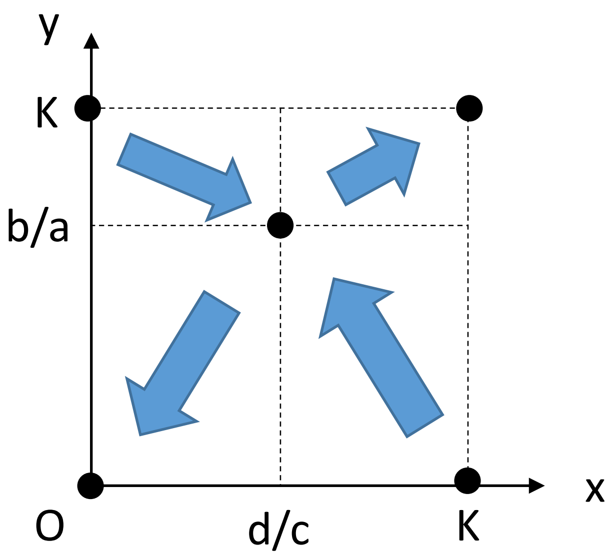
複数個体群関係ー共生関係

成長率が相手の個体群の成長率の増加関数となる場合

$$\partial F_x/\partial y > 0, \qquad \partial F_y/\partial x > 0 \tag{3.3}$$

このとき個体群ダイナミクスを以下のように与える

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{ay(t) - b\}x(t)(K - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= \{cx(t) - d\}y(t)(K - y(t)) \qquad a, b, c, d > 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$



均衡点 (3.5)の式=0

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0), (K, K), \left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right), (K, 0), (0, K)$$

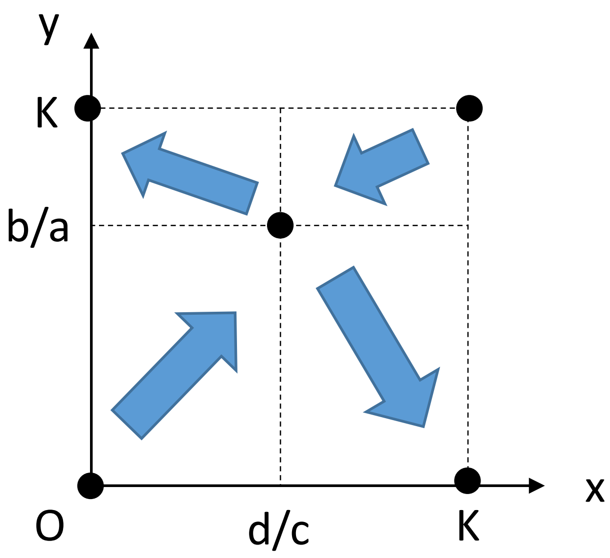
複数個体群関係ー競争関係

お互いの成長率が相手の個体群が成長することで減少する場合

$$\partial F_x/\partial y < 0, \qquad \partial F_y/\partial x < 0 \tag{3.6}$$

このとき個体群ダイナミクスを以下のように与える

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{b - ay(t)\}x(t)(K - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= \{d - cx(t)\}y(t)(K - y(t)) \qquad a,b,c,d > 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$



均衡点 (3.5)の式=0

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0), (K,K), \left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right), (K,0), (0,K)$$

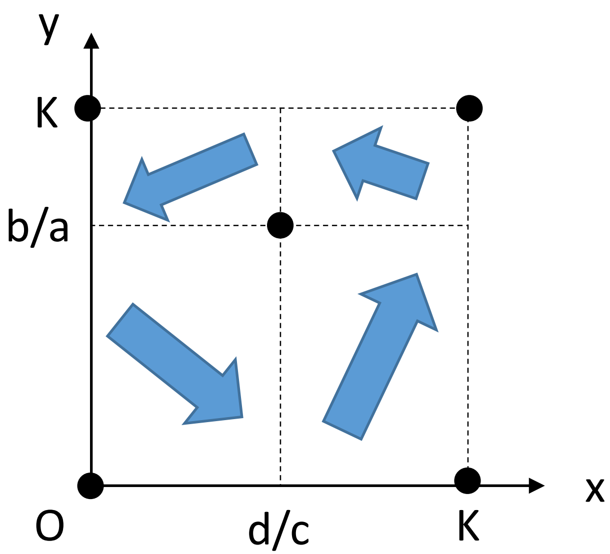
複数個体群関係ー寄生関係

一方の個体群は，相手の個体群が成長すると成長するが，
もう一方の個体群は，相手の個体群の成長によって成長が抑制

$$\partial F_x/\partial y < 0, \qquad \partial F_y/\partial x > 0 \tag{3.9}$$

このとき個体群ダイナミクスを以下のように与える

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{b - ay(t)\}x(t)(K - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= \{cx(t) - d\}y(t)(K - y(t)) \qquad a, b, c, d > 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$



均衡点 (3.5)の式=0

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0), (K, K), \left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right), (K, 0), (0, K)$$

生物の社会的行動

複雑な環境に適応していくうえで，どのような意味を持つのか

進化論説

生物の適応性

戦略

適応度(指標)

→ 生物は適応的(※) → 自然淘汰

(※)集団全体の成長や生存に役立つときも

社会的行動も自然淘汰の上で残っている！

進化ゲームが基づく考え方(進化論説を再現)

進化ゲーム ＝ 突然変異 ＋ 自然淘汰

進化的に安定な戦略が残っていく様相を動学的に表す

→ **レプリケータダイナミクス**

進化ゲームは進化論説の再現

あらゆる社会的行動原理・社会的規範を説明できる

■進化ゲームの手法

集団全体での平均的な適応度を基準に，それより高い適応度を持つ主体は，その差に比例して，自分と同じ戦略をとるように遺伝子などによってプログラムされた子孫を残す

■進化ゲームのモデル化(仮定)

同じ集団あるいは複数集団から，それぞれ任意に選ばれた二人の主体によるランダムな相互作用を考える

それぞれの主体が選択する戦略の組に対して適応度を定義

各主体は同じ利得行列を持つとして，均質な集団での相互作用を扱う(異質性は考慮しない)

各主体は相手の戦略を先読みしない(近視眼的)

3.3　進化的に安定な戦略

■進化的に安定な戦略(ESS：evolutionary stable strategy)

既存戦略の適応度	＞	突然変異戦略の適応度

突然変異戦略は淘汰される

このとき，既存戦略は進化的に安定であるという

■進化的に安定な戦略の条件

集団のほとんどの主体が既存戦略x

ある一部の主体(割合ε)がそれとは異なる突然変異戦略y

(1)　(均衡条件)　$U(x,x) \geqq U(y,x) \quad \forall y\ (\neq x)$　(3.14)

(2)　(安定条件)　$U(y,x) = U(x,x)$ ならば $U(x,y) > U(y,y) \quad y \neq x$　(3.15)

(1)　(均衡条件)　$U(x,x) \geqq U(y,x) \qquad \forall y\ (\neq x)$　(3.14)

(2)　(安定条件)　$U(y,x) = U(x,x)$ ならば $U(x,y) > U(y,y) \quad y \neq x$　(3.15)

既存戦略xが進化的に安定ならば

戦略xをとる主体の期待利得		戦略yをとる主体の期待利得
$(1-\varepsilon)U(x,x) + \varepsilon U(x,y)$	$>$	$(1-\varepsilon)U(y,x) + \varepsilon U(y,y)$

$\varepsilon \ll 1$　なので　均衡条件が得られる

$U(y,x) = U(x,x)$　ならば　安定条件が得られる

均衡条件はナッシュ均衡を意味する(最適な反応戦略)

進化的に安定な戦略＝ナッシュ均衡解　かつ　安定性をもつ

■タカーハトゲームにおける進化的に安定な戦略

xの戦略 \ yの戦略	S_1 (タカ派)	S_2 (ハト派)
S_1 (タカ派)	(v-c)/2, (v-c)/2	v, 0
S_2 (ハト派)	0, v	v/2, v/2

均衡条件

$$U(x,x) - U(y,x) \geq 0$$

$$U(x,x) = xU(e_1,x) + (1-x)U(e_2,1-x)$$
$$= x\left\{\frac{(v-c)x}{2} + v(1-x)\right\} + (1-x)\{\frac{v(1-x)}{2}\}$$
$$U(x,y) = xU(e_1,y) + (1-x)U(e_2,1-y)$$
$$= x\left\{\frac{(v-c)y}{2} + v(1-y)\right\} + (1-x)\{\frac{v(1-y)}{2}\}$$

3.3　進化的に安定な戦略

均衡条件(続き)

$$U(x,x)-U(x,y)=(\mathrm{x}-\mathrm{y})(-\mathrm{cx}+\mathrm{v})/2\geq 0$$

yは任意なのでナッシュ区均衡解である融合戦略は(v/c,1-v/c)

安定条件

$$x=\frac{v}{c}\rightarrow U(y,x)-U(y,y)\geq 0$$

$$U(y,x)-U(y,y)=\frac{(\mathrm{y}-\mathrm{x})(\mathrm{cy}-\mathrm{v})}{2}=\frac{c(\mathrm{y}-v/c)^2}{2}\geq 0$$

したがって融合戦略は(v/c,1-v/c)は進化的に安定な戦略

自分の戦略 \ 自分の戦略	S_1	S_2
S_1	α α	0 0
S_2	0 0	β β

(1)協調ゲーム(α>0,β>0)

(2)相補ゲーム(α<0,β<0)

(3)支配戦略ゲーム(αβ<0)

■それぞれのゲームで進化的に安定な戦略は？

(1) : $NES=\{e_1, e_2, x\} \rightarrow ESS = \{e_1, e_2\}$

(2) : $NES=\{x\} \rightarrow ESS = \{x\}$

(3)(i)α<0,β>0のとき : $NES=\{e_2\} \rightarrow ESS = \{e_2\}$

集団全体の戦略分布がどのような経路をたどって均衡状態に達するのかを明らかにしたい

↓

動学的な観点から扱う必要性

↓

レプリケータダイナミクス

(進化ゲームにおける仮定)
各主体は同じ利得行列を持つとして，均質な集団での相互作用を対象に扱う

	利得行列
単一集団	対称ゲーム
複数集団	非対称ゲーム

■設定

利得行列

自分の戦略 \ 自分の戦略	S_1	S_2
S_1	a, a	b, c
S_2	c, b	d, d

N人の主体$G = \{A_i : 1 \leq i \leq N\}$

戦略$S_i, i = 1,2$を選択する主体の数$N_i, i = 1,2 (N_1(t) + N_2(t) = N)$

$x_i(t) = N_i(t)/N, i = 1,2$　　集団の戦略分布：$x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

純粋戦略$S_i(e_i), i = 1,2$を選択する主体の期待利得$U(e_i, x(t)), i = 1,2$

集団全体で一人あたりの平均利得

$$U(x(t), x(t)) = \sum_{i=1}^{2} x_i(t) U(e_i, x(t)) \tag{3.32}$$

レプリケータダイナミクスでは，高い適応度を持つ戦略は優勢な戦略として集団に占める割合が次第に増加するとしてモデル化

各戦略をとる子孫の数は，それぞれ戦略の下での期待利得と集団全体の平均利得との相対比に比例して増加する

■世代$t+1$において戦略$S_i(e_i)$を選択する主体の割合$x_i(t+1)$

離散的なレプリケータダイナミクス

$$x_i(t+1) = \left\{ \frac{U(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}(t))}{U(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t))} \right\} x_i(t) \qquad i = 1, 2 \tag{3.33}$$

EX)行列パラメータa=d=0(相補ゲーム)

$$\begin{aligned} &U(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = b(1-x), \quad U(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = cx \\ &U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = xU(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) + (1-x)U(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = (b+c)x(1-x) \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$x_1(t+1) = b/(b+c) \equiv \theta, \quad x_2(t+1) = c/(b+c) \equiv 1-\theta \tag{3.35}$$

各戦略の占有率は一定

$$\Delta x_i(t) \equiv x_i(t+1) - x_i(t) = \left\{ \frac{U(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}(t)) - U(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t))}{U(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t))} \right\} x_i(t) \quad (3.36)$$

連続的なレプリケータダイナミクス

$$\dot{x}_i(t) = \{U(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\} x_i(t) \qquad i = 1, 2 \qquad (3.38)$$

■利得行列を用いて実際に計算

$$\begin{aligned} &U(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = ax + b(1-x), \qquad U(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = cx + d(1-x) \\ &U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = xU(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}) + (1-x)U(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (3.44)$$

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (1-x)\{U(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x})\} \\ &= (1-x)\{(a+d-b-c)x + d - b\} \quad (3.45) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \{(a+d-b-c)x(t) + d - b\}\{1 - x(t)\}x(t) \qquad (3.46)$$

$$\dot{x}(t) = \{(\alpha+\beta)x(t) - \beta\}x(t)\{1 - x(t)\} \qquad (3.47)$$

$$\dot{x}(t) = \{(\alpha + \beta)x(t) - \beta\}x(t)\{1 - x(t)\} \tag{3.47}$$

$$\dot{x}(t) = (\alpha + \beta)\{x(t) - \theta\}x(t)\{1 - x(t)\} \tag{3.48}$$

■協調ゲーム

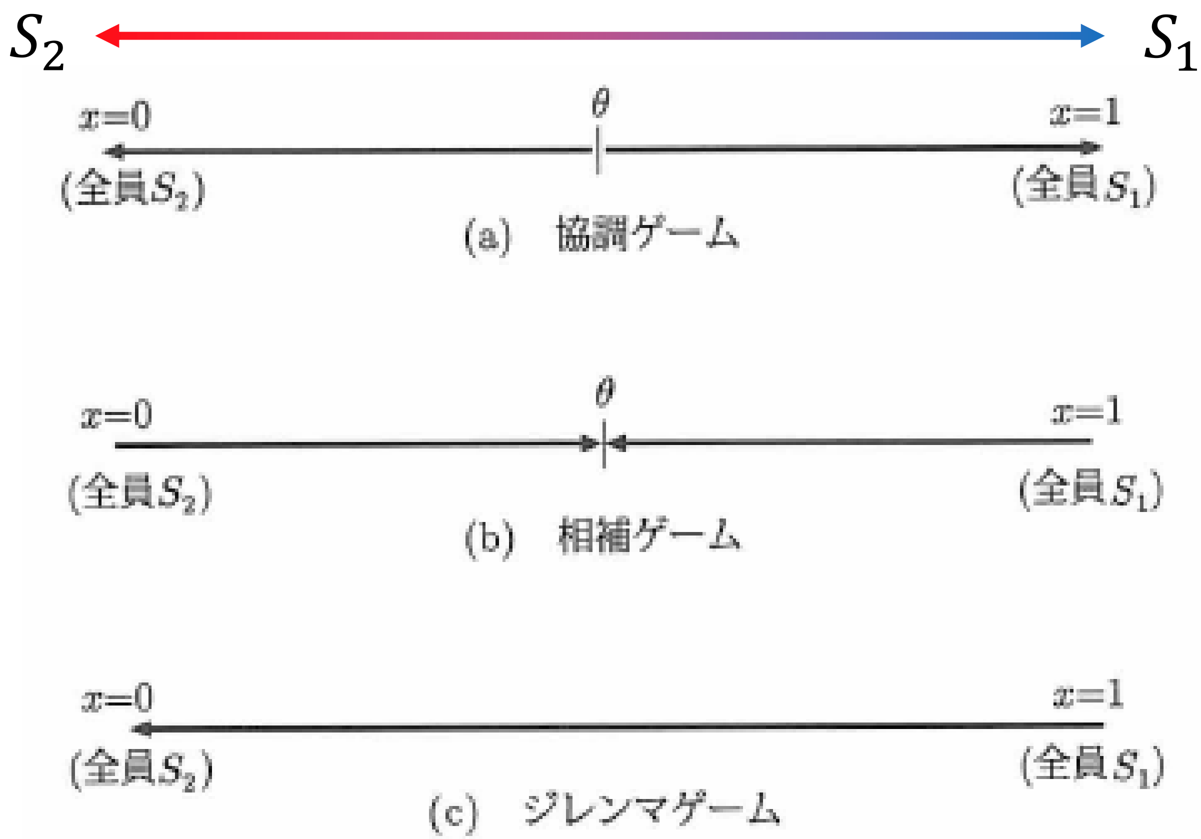
α>0,β>0

■相補ゲーム

α<0,β<0

■ジレンマゲーム

α<0,β>0



進化的に安定な戦略と同じ結果！

図 3.1 レプリケータダイナミクスの収束特性と吸引領域

複数集団による相互作用

異なる集団に属する主体はそれぞれ異なる戦略をもつとして扱う

利得行列が非対称になる

(a)　利得行列 (複数集団の相互

集団G_B

A の戦略 \ B の戦略	S_1　$y(t)$	S_2　$1\text{-}y(t)$
集団G_A　S_1　$x(t)$	a_A, a_B	b_A, c_B
S_2　$1\text{-}x(t)$	c_A, b_B	d_A, d_B

(b)　変換後の利得行列 (

集団G_B

掲)

A の戦略 \ B の戦略	S_1　$y(t)$	S_2　$1\text{-}y(t)$
S_1　$x(t)$	α_A, α_B	0, 0
S_2　$1\text{-}x(t)$	0, 0	β_A, β_B

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \{U_A(e_1, y) - U_A(x, y)\}x(t) \\
&= \{(\alpha_A + \beta_A)y(t) - \beta_A\}x(t)\{1 - x(t)\} \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \{U_B(e_1, x) - U_B(x, y)\}y(t) \\
&= \{(\alpha_B + \beta_B)x(t) - \beta_B\}y(t)\{1 - y(t)\} \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

式を書き直すと

複数集団のレプリケータダイナミクス

$$\theta_A = \beta_A/(\alpha_A + \beta_A)$$
$$\theta_B = \beta_B/(\alpha_B + \beta_B)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\alpha_A + \beta_A)\{y(t) - \theta_A\}x(t)\{1 - x(t)\} \\ \dot{y}(t) &= (\alpha_B + \beta_B)\{x(t) - \theta_B\}y(t)\{1 - y(t)\}\end{aligned} \quad (3.58)$$

相空間によって系の軌道を表現する

安定条件は均衡点のヤコビ行列が負定値行列であること

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}(\alpha_A + \beta_A)(y - \theta_A)(1 - 2x) & (\alpha_A + \beta_A)x(1 - x) \\ (\alpha_B + \beta_B)y(1 - y) & (\alpha_B + \beta_{\boldsymbol{B}})(x - \theta_B)(1 - 2y)\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}$$

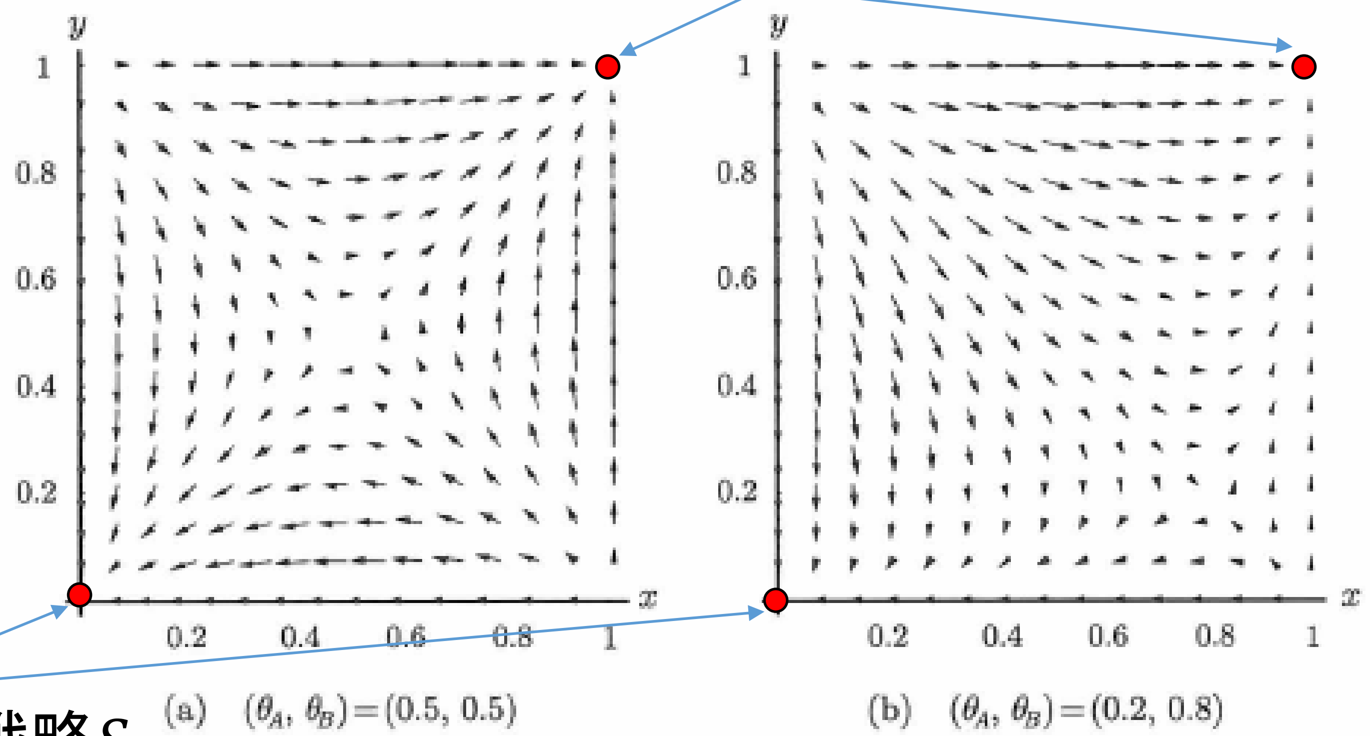
均衡点は$(x, y) = (0,0), (1,1), (1,0), (0,1), (\theta_B, \theta_A)$

安定かどうかはパラメータ次第！

(1) $\alpha_i > 0, \beta_i > 0, i = A, B$

$(x, y) = (0,0), (1,1)$のときヤコビ行列は負定値

どちらの集団も戦略S_1



どちらの集団も戦略S_2

図 3.2　レプリケータダイナミクス (協調ゲーム) の位相図

(2) $\alpha_i < 0, \beta_i < 0, i = A, B$

$(x, y) = (1,0), (0,1)$のときヤコビ行列は負定値

集団G_Aは戦略S_2，集団G_Bは戦略S_1

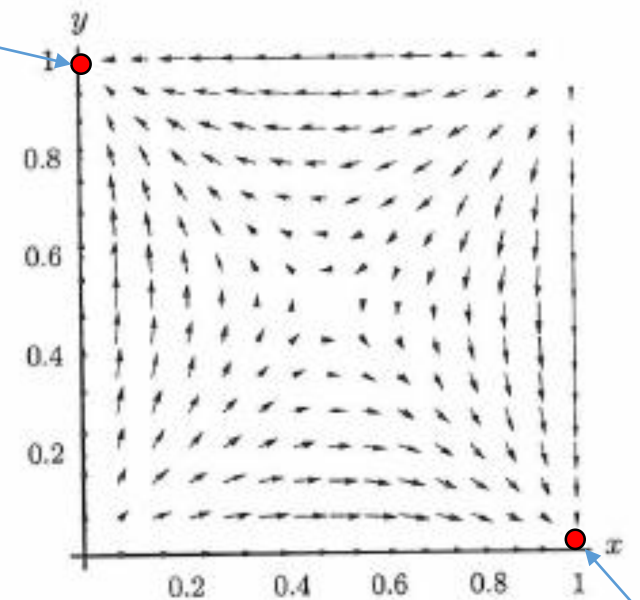


図 3.3　レプリケータダイナミクス（相補ゲーム）の位相図：$(\theta_A, \theta_B) = (0.5, 0.5)$

集団G_Aは戦略S_1，集団G_Bは戦略S_2

(3) $\alpha_i \beta_i < 0, i = A, B$

$\alpha_i > 0$の場合，戦略S_1が支配戦略

$(x, y) = (1,1)$に収束

$\alpha_i < 0$の場合，戦略S_2が支配戦略

$(x, y) = (0,0)$に収束

(4) $\alpha_A < 0, \beta_A < 0, \alpha_B > 0, \beta_B > 0$または$\alpha_A > 0, \beta_A > 0, \alpha_B < 0, \beta_B < 0$

安定となる均衡点は存在しない！

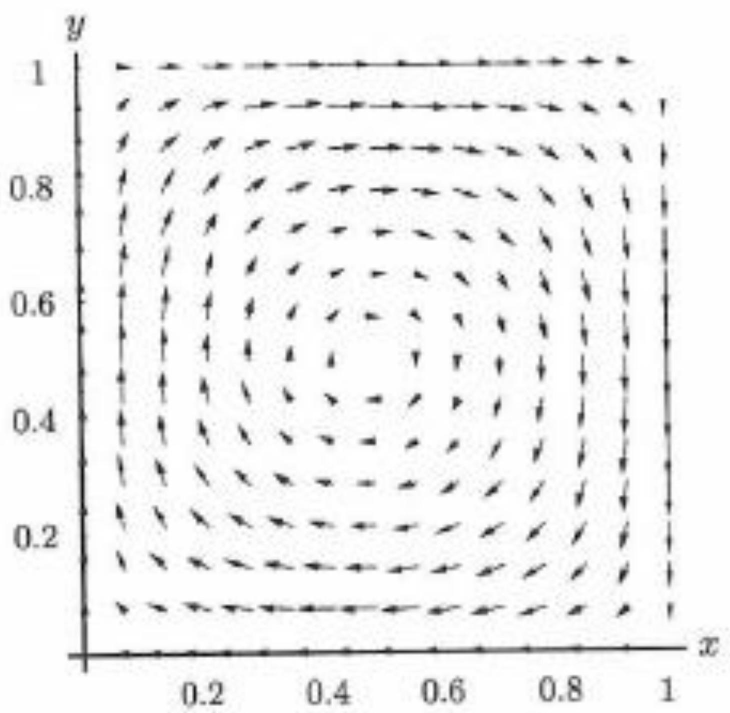


図 3.4　レプリケータダイナミクス(堂々めぐりゲーム)の位相図：$(\theta_A, \theta_B) = (0.5, 0.5)$

個体群ダイナミクスでも見た！！

表 3.3 非対称なタカ-ハトゲーム (1)

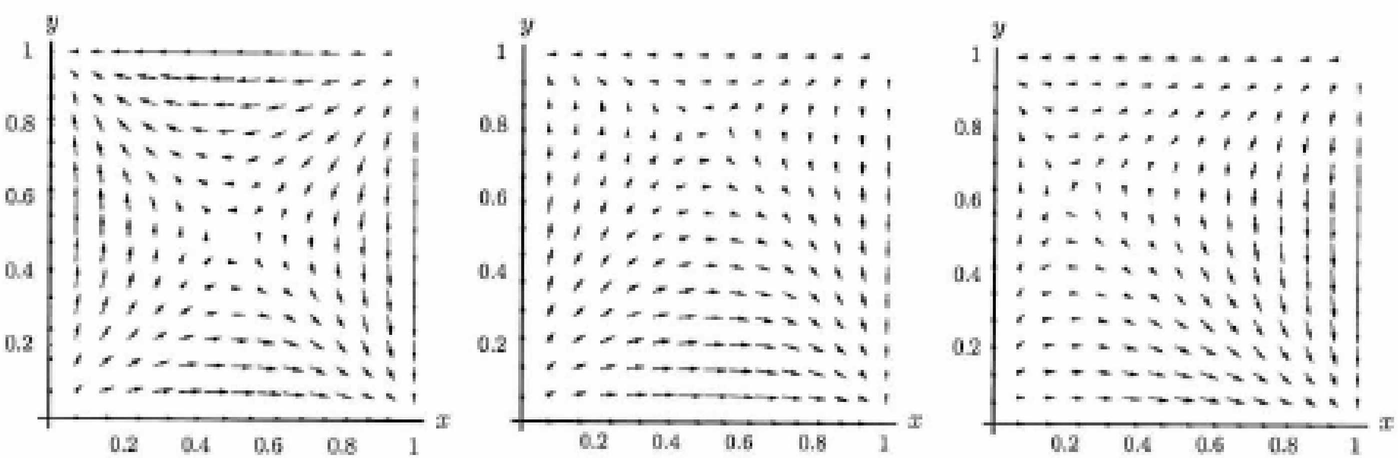
A の戦略 \ B の戦略	S_1 (タカ派)	S_2 (ハト派)
S_1 (タカ派)	$(v_B - \boxed{c_B})/2$ $(v_A - \boxed{c_A})/2$	0 v_A
S_2 (ハト派)	v_B 0	$v_B/2$ $v_B/2$

表 3.4 非対称なタカ-ハトゲーム (2)

A の戦略 \ B の戦略	S_1 (タカ派)	S_2 (ハト派)
S_1 (タカ派)	$(v-c)/2$ $(v-c)/2$	0 v
S_2 (ハト派)	v 0	$v/2 \boxed{+\varepsilon}$ $v/2 \boxed{-\varepsilon}$

Aは戦いのコスト低い$c_A < c_B$

Aはがっつかない



(a) $(\theta_A, \theta_B) = (0.5, 0.5)$ (b) $(\theta_A, \theta_B) = (0.8, 0.5)$ (c) $(\theta_A, \theta_B) = (7/11, 1/5)$

図 3.5 レプリケータダイナミクス (タカ-ハトゲーム) の位相図

結果としてAは有利

■タカ―ハトゲームにおける進化的に安定な戦略

xの戦略 \ yの戦略	S_1 (タカ派)	S_2 (ハト派)
S_1 (タカ派)	(v-c)/2, (v-c)/2	v, 0
S_2 (ハト派)	0, v	v/2, v/2

均衡条件

$$U(x,x) - U(y,x) \geq 0$$

$$U(x,x) = xU(e_1,x) + (1-x)U(e_2,1-x)$$
$$= x\left\{\frac{(v-c)x}{2} + v(1-x)\right\} + (1-x)\{\frac{v(1-x)}{2}\}$$
$$U(x,y) = xU(e_1,y) + (1-x)U(e_2,1-y)$$
$$= x\left\{\frac{(v-c)y}{2} + v(1-y)\right\} + (1-x)\{\frac{v(1-y)}{2}\}$$

均衡条件(続き)

$$U(x,x) - U(x,y) = (\mathrm{x} - \mathrm{y})(-\mathrm{cx} + \mathrm{v})/2 \geq 0$$

yは任意なのでナッシュ区均衡解である融合戦略は(v/c,1-v/c)

安定条件

$$x = \frac{v}{c} \rightarrow U(y,x) - U(y,y) \geq 0$$

$$U(y,x) - U(y,y) = \frac{(\mathrm{y} - \mathrm{x})(\mathrm{cy} - \mathrm{v})}{2} = \frac{c(\mathrm{y} - v/c)^2}{2} \geq 0$$

したがって融合戦略は(v/c,1-v/c)は**進化的に安定な戦略**