メカニズムデザインと
意思決定のフロンティア

坂井豊貴, 慶應義塾大学出版会, 2014.

2018/9/8
#夏の理論合宿
B4　飯塚 卓哉

第1章　グローヴスメカニズム

はじめに

メカニズムデザインとは……

：人々のインセンティブを入念に考慮に入れたうえで，経済や政治に関する集団的決定の仕組みを作ろうとする学問分野

問題意識

- 人々が集団で経済や政治にかかわる決定を行うとき，一般に他者の選考に関する情報は他者からは分からない
- 一方で，仲裁者の立場から適切な決定を行うためには正しい情報があった方がいいが，人々に尋ねても正直に教えてくれるとは限らない（インセンティブが必ずしもない）

➡ 工夫して人々から真の情報を引き出せないか（正直に教えるインセンティブをどうすれば与えられるか）

□ 誰にとっても正直に自身の選考を表明することが常に得策となっている，というメカニズム

＝　**耐戦略性**を持つ

一定の弱い条件の下で**効率性**と**耐戦略性**を満たすメカニズムはすべて**グローヴスメカニズム**

準線形環境

準線形環境：金銭移転が可能で，かつ人々の選考が金銭について準線形である経済モデル

- 個人$i \in I$が選択肢$a \in A$に対して持つ金銭換算価値 ＝ **評価値** $v_i(a) \in \mathbb{R}$
- $v : A \to \mathbb{R}$ ：**評価関数**，評価関数の全体からなる集合：$\mathbb{R}^A$
- 個人iの**ドメイン**：非空集合 $V_i \subset \mathbb{R}^A$

- **評価関数プロファイル（みんなの評価値）**とその集合 ： $v = (v_i)_{i \in I} \in V = \times_{i \in I} V_i$
- ひとりのiを除く評価関数プロファイルとその集合 ：$v_{-i} = \left(v_j\right)_{j \neq i} \in V_{-i} = \times_{j \neq i} V_j$

また，$v = (v_i, v_{-i}) \in V_i \times V_{-i} = V$ と記す

各$t_i \in \mathbb{R}$によりiの(ネットの)金銭移転額を表す（$t_i \geq 0$ならiはお金を受け取り，$t_i \leq 0$なら支払う）

各$i \in I$は選択肢と金銭移転額の集合$A \times \mathbb{R}$の上に選好を持っており，準線形関数

$$U(a, t_i; v_i) = v_i(a) + t_i \quad \forall (a, t_i) \in A \times \mathbb{R}$$

により表される．

メカニズムとパレート効率

問題の仲裁者の立場で考える……

- 真の評価関数プロファイル$v \in V$が何かは知らない
- しかし$v \in V$を知っているとすれば，そのもとで何か優れた決定をAから行い，人々の間での適切な金銭移転額を決めたい

- **決定関数** $d : V \to A$

  各$v \in V$のもとで採用する選択肢$d(v) \in V$を選び取る関数

- **金銭移転関数** $t : V \to \mathbb{R}^I$

  各$v \in V$のもとで人々の金銭移転額を $t(v) = \left(t_1(v), t_2(v), \ldots, t_n(v)\right) \in \mathbb{R}^I$ と決めるもの

→ 決定関数dと金銭移転関数tのペア(d, t)：（**直接**）**メカニズム**

メカニズム(d, t)が**パレート効率的**：任意の$v \in V$に対して，

どのような $(a, m_1, m_2, \ldots, m_n) \in A \times \mathbb{R}^I$

も条件

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} t_i(v) \qquad (1)$$

$$U(a, m_i; v_i) \geq U(d(v), t_i(v); v_i) \ \ \forall i \in I \qquad (2)$$

$$U\left(a, m_j; v_j\right) > U\left(d(v), t_j(v); v_j\right) \ \ \exists j \in I \qquad (3)$$

結果$(d(v), t(v))$に対し，何か別の選択肢aと個人間での金銭移転$(m_1, m_2, \ldots, m_n)$によって (1)，どのiにも損をさせることなく (2)，誰かjに得をさせることができない (3).

パレート効率性

補題 1. メカニズム(d,t)がパレート効率的であることと，条件

$$\sum_{i\in I} v_i\big(d(v)\big) = \max_{a\in A}\sum_{i\in I} v_i(a) \quad \forall v \in V$$

が成り立つことは同値である

証明は略.

→ メカニズムにパレート効率性を満たさせるにはdだけに着目すれば良い

つまり，決定関数dが（**決定**）**効率性**を満たす

＝ 条件 $$\sum_{i\in I} v_i\big(d(v)\big) = \max_{a\in A}\sum_{i\in I} v_i(a) \quad \forall v \in V$$ を満たす

→ パレート効率的

以後，dを効率性を満たす決定関数としてひとつ固定する（＝パレート効率性を満たす）

耐戦略性とグローヴスメカニズム(1)

メカニズム(d,t)のもとで，任意の個人$i \in I$について考え，彼の真の評価関数を$v_i \in V_i$だとする.
他の人々が$v_{-i} \in V_{-i}$ を表明したときに，もしiが$v_i' \in V_i$を表明したならば，iの準線形効用は

$$U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i) = v_i\big(d(v_i', v_{-i})\big) + t_i(v_i', v_{-i})$$

この下で，$v_i' = v_i$とするのが得策であるという誘因両立性の条件を定める.

メカニズム(d,t)が**耐戦略性**を満たす：
任意の$i \in I$, $v_i \in V_i$, $v_{-i} \in V_{-i}$, $v_i' \in V_i$について

$$U(d(v_i, v_{-i}), t_i(v_i, v_{-i}); v_i) \geq U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i)$$

が成り立つ.

↔　誰にとっても正直に自身の評価関数を表明することがゲーム理論における（弱）支配戦略になっている

dはパレート効率的であるとした……
→ 耐戦略性を満たす都合の良いtは存在するか

耐戦略性とグローヴスメカニズム(2)

■　dがパレート効率的であることを利用して耐戦略性を持つ(d,t)について考える

任意の個人$i \in I$について，t_iが

$$\boxed{t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V}$$

だとする．

このとき，任意の$v \in V$について，効率性より

$$U(d(v), t_i(v); v_i) = v_i\big(d(v)\big) + \underbrace{\sum_{j \neq i} v_j(d(v))}_{= t_i(v)}$$

$$= \sum_{j \in I} v_j(d(v))$$

$$= \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a)$$

dがパレート効率的より

が成り立つ．

一方で任意の$b_i \in V_i$と任意の$v_{-i} \in V_{-i}$について

$$U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i) = v_i\big(d(b_i, v_{-i})\big) + \sum_{j \neq i} v_j(d(b_i, v_{-i}))$$

$$= \sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i}))$$

$$\leq \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a)$$

以上より任意の$b_i \in V_i$と任意の$v_{-i} \in V_{-i}$について

$$U(d(v), t_i(v); v_i) \geq U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i)$$

つまり(d,t)が耐戦略性を満たす

耐戦略性とグローヴスメカニズム(3)

■ t_iが $t_i(v)=\sum_{j\neq i} v_j(d(v))\quad \forall v\in V$ であれば，(d,t)は耐戦略性を満たす．
他にはないか……

→ 何でもよいので定数$H\in\mathbb{R}$について，tが

$$t_i(v)=\sum_{j\neq i} v_j(d(v))+H\quad \forall v\in V$$

のときも(d,t)は耐戦略性を満たす．

$$\begin{aligned}U(d(v),t_i(v);v_i)&=\max_{a\in A}\sum_{j\in I} v_j(a)+H\\&\geq \sum_{j\in I} v_j\big(d(b_i,v_{-i})\big)+H\\&=U(d(b_i,v_{-i}),t_i(b_i,v_{-i});v_i)\end{aligned}$$

→ 更に，各$v_{-i}\in V_{-i}$について定数$h_i(v_{-i})$を何でもよいので定めて

$$t_i(v)=\sum_{j\neq i} v_j(d(v))+h_i(v_{-i})\quad \forall v\in V$$

のときも(d,t)は耐戦略性を満たす．

$$\begin{aligned}U(d(v),t_i(v);v_i)&=v_i\big(d(v)\big)+\underbrace{\sum_{j\neq i} v_j(d(v))+h_i(v_{-i})}_{=t_i(v)}\\&=\max_{a\in A}\sum_{j\in I} v_j(a)+h_i(v_{-i})\\&\geq \sum_{j\in I} v_j\big(d(b_i,v_{-i})\big)+h_i(v_{-i})\\&=v_i\big(d(b_i,v_{-i})\big)+\underbrace{\sum_{j\neq i} v_j\big(d(b_i,v_{-i})\big)+h_i(v_{-i})}_{=t_i(b_i,v_{-i})}\\&=U(d(b_i,v_{-i}),t_i(b_i,v_{-i});v_i)\end{aligned}$$

つまり，tが

$$t_i(v)=\sum_{j\neq i} v_j(d(v))+h_i(v_{-i})\quad \forall v\in V$$

この形状をしている限り耐戦略性は成り立つ．

耐戦略性とグローヴスメカニズム(4)

メカニズム(d,t)が**グローヴスメカニズム**である：

dが効率的であり，また任意の$i \in I$について，ある関数$h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$が存在して

$$t_i(v) = h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V$$

を満たす.

- h_iの作り方は無数にあるのでグローヴスメカニズムも無数に存在する．しかしそれらはいずれも上記の形を有している
- そしてまた何か他の条件を追加的に求めると，それらのうちわずかしかその条件を満たさないことが多い

以上より，逆に言えば

定理 1.　あらゆるグローヴスメカニズムは効率性と耐戦略性を満たす.

※また，効率性と耐戦略性を満たす任意のメカニズム(d,t)はグローヴスメカニズムであると証明できるため，グローヴスメカニズムであることは，メカニズムが効率性と耐戦略性を満たすことの必要十分条件（ホルムストロームの定理）

ピボタルメカニズム

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) + \underline{h_i(v_{-i})}$$

なぜこの項を付け加えたのか？

→ 多くのケースでは$\sum_{j \neq i} v_j(d(v)) > 0$が頻繁に成り立つ．（$i$ 一人程度を除いても他者の便益の和が正になる）

→ $t_i(v) > 0$になる ＝ iはお金を受け取る

＝ 仲裁者がみんなにお金をあげる（そんな予算は普通ない！）

つまり，h_iが何かマイナスの値を取って調整する必要がある．

任意の$i \in I$について

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) \quad \forall v_{-i} \in V_{-i}$$

と定めると，

$$\underline{t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) - \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) < 0} \quad \forall v \in V$$

iはお金を支払う

上記のようなtにより定義されたメカニズム(d, t)：**ピボタルメカニズム**

VCGオークション

- ピボタルメカニズムの応用先：組み合わせオークション

→ Xをオークションで売られる有限個の財の集合とする.

配分 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，各x_iをiの買い物と解釈すると

$$x_i \subset X \quad \forall i \in I$$

$$x_i \cap x_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I$$

を満たす，Xの互いに疎な（空でありえる）部分集合の組み合わせ.

そしてAを配分の集合とすると，Xが有限なのでAも有限である.

各$i \in I$の評価関数$v_i : A \to \mathbb{R}$は以下の条件を満たすものとする.

$$x_i = y_i \;\Rightarrow\; v_i(x) = v_i(y) \quad \forall x, y \in A \qquad \text{(財は私的財)}$$

$$x_i = \emptyset \;\Rightarrow\; v_i(x) = 0 \quad \forall x \in A \qquad \text{(空箱の便益はゼロ)}$$

$$v_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{A}$$

$$x_i \subset y_i \;\Rightarrow\; v_i(x) \leq v_i(y) \quad \forall x, y \in A$$

これらの条件を満たす評価関数の集合をV_iで表す.

このときメカニズム(d, t)は組み合わせオークションの方式を表し，ここでのピボタルメカニズムを特に**VCGオークション（VCGメカニズム）**という.

第1章まとめと展望

- 効率的で，耐戦略性を満たすメカニズムは準線形環境においてはグローヴスメカニズムしか存在しない
- つまり，グローヴスメカニズム下では，「評価関数を正直に教えるのが効用が高い」ということを人々に説明することができ，信じてもらえたら，仲裁者は正しい情報を得ることができる.
- 準線形性は所得効果の一切を除外する強い仮定であり，準線形性の仮定に依らないピボタルメカニズムの定義が研究されている.
- グローヴスメカニズムにおいては公平性に関する条件は全く検討されていないが，社会で広く受け入れられるにはメカニズムデザインの公平性は重要な観点である.

第2章　コア選択オークション

VCGメカニズムの問題点(1)

■ 複数財オークション：オークションを通じて一度に複数の財を配分する

→ 財の間に代替性や補完性などの関連性が存在するため，買い手は個々の財ではなく，財の組み合わせに対して評価する

→ **VCGメカニズム**の下で，各人の価値評価を正しく収集し，効率的な配分を実現できる

VCGメカニズムにおける支払額

$$t_i(v) = \underbrace{\sum_{j \neq i} v_j(d(v))}_{\text{配分結果}d(v)\text{により自分以外が得られる利得}} - \underbrace{\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a)}_{\text{自分以外の人たちの理想の配分における利得}} < 0 \quad \forall v \in V$$

iがオークションに参加することによりi以外の人に与える外部性（迷惑料）

現実の制度設計でVCGメカニズムを採用するとうまくいくか

→ **公的資源の配分**においては，効率的な配分を実現するだけではなく，各人の支払額も含めた**事後的な結果に参加者全員が納得**するようなものでなければならない

VCGメカニズムの問題点(2)

例：財X,Yを3人の入札者A,B,Cに配分する.

入札者	X	Y	XY
A	10	0	10
B	0	10	10
C	0	0	10

入札者A,B,Cの価値評価

VCGメカニズムにより，配分・支払額を決定すると

- ■ 配分：効率性より，A,Bがそれぞれ財X,Yを獲得
- ■ 支払額：財を獲得していないCの支払額は0.
  CはXYに対して10の価値を持っている一方，BはYのみに対して10の価値を持っている．つまりAはXに対してほんの少しの価値を持っていればXを獲得できる.
  よってAの支払額は0（微少量）．同様にBの支払額も0.

→ A とBは売り手に一銭も支払わず，財を獲得できてしまう

問題点

- 売り手は収入が0になるくらいなら，Cと個別に交渉して適当な値段で売ったほうが良い
- 例えばもし，A,Bの財X,Yに対する価値が4だった場合，VCGメカニズムの結果はCが財XYを支払額8で獲得するはずだが，A,Bが価値評価を10と偽れば財をタダで獲得できてしまう

→ プレイヤー間で協力して嘘をつく（または逸脱する）ことで，得ができてしまう

コア選択オークション

：事後的な結果に参加者全員が納得することを重視して，申告された価値評価の下で，結果がコアに属するように財配分・支払額を決定するオークション

- ある配分が**コア**に属する

：社会の一部分がグループ（提携）を組んで逸脱し，彼らの中だけで資源配分を行ったとしても元の配分以上の利得を得られない状態

（先の例で言えば，売り手とCが提携を組んで逸脱しないよう，AとBに相応の支払いを課す）

望ましい結果の基準として効率性よりも強い性質のコアを要求すると，同時に耐戦略性を満たすメカニズムは設計できるか

→ 効率性と耐戦略性を満たすメカニズムはVCGメカニズムのみであるが，例のようにコアに属さないVCGメカニズムがある以上不可能

議論の方向性

1. どのような環境であれば，コアと耐戦略性を両立できるか
2. コア選択オークションが耐戦略性を満たさないなら均衡でどのような配分が実現されるのか

モデル（定義）

- オークションにかかわる**プレーヤー集合**：$N = \{0,1,\dots,n\}$，0は売り手，$i = 1,\dots,n$は入札者
- 配分される財の集合Kに対して，入札者iが獲得しうる財のパッケージの集合を$X_i \subseteq 2^K$，獲得する財のパッケージを$x_i \in X_i$．各入札者についてからのパッケージ$\emptyset \in X_i$
- 各人の獲得する財のパッケージの組$x = (x_1,\dots,x_n)$を**財配分**と呼び，互いのパッケージが排反であるような財配分が実行可能．実行可能な財配分の集合をXで表す

各入札者は準線形の選好を持ち，財に対する価値評価関数$v_i : X_i \to \mathbb{R}_+$を持つ．これは$v_i(\emptyset) = 0$と基準化し，弱増加関数．

入札者が持ちうる価値評価関数の集合をVで表す．入札者iが財のパッケージx_iを獲得し，売り手にp_iを支払ったとき彼の利得は

$$\pi_i = v_i(x_i) - p_i$$

一方，売り手の利得は各入札者から得られる収入：$\pi_0 = \sum_{i \in N_{-0}} p_i$

実行可能な財配分と各入札者の支払額が与えられたとき，対応する利得ベクトル $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ を**利得配分**（もしくは単に配分）と呼ぶ．

各人の利得が非負であるとき，配分$\pi \geq 0$は**個人合理的である**と呼ぶ．

価値評価関数の組$v = (v_i)_{i \in N_{-0}}$を所与としたとき，プレーヤーの提携$S \subseteq N$のみで実現可能な社会的余剰の最大値を**提携値関数**$w(S|v)$で表すと，

$$w(S|v) = \begin{cases} \max_{x \in X} \sum_{i \in S} v_i(x_i) & if\ 0 \in S \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

現在の配分がπであったとき，ある提携Sについて$\sum_{i \in S} \pi_i < w(S)$が成り立っているとすると$S$は現在の社会から逸脱し，彼らだけで資源配分を行うことで提携内の全員を改善させることができる．この状況を「**配分πを提携Sがブロックする**」と呼ぶ

モデル(コアとは)

コアの配分：どのような提携によってもブロックされない配分（特に非効率な配分は全体提携Nによってブロックされるため，コアの配分は効率的）

価値関数の組を所与としたとき，オークションのコアは以下で定義される

$$Core(N,w)=\left\{\pi \geq 0 \middle| \sum_{i\in N}\pi_I = w(N), (\forall S\subseteq N)\sum_{i\in S}\pi_i \geq w(S)\right\}$$

入札者	X	Y	XY
A	10	0	10
B	0	10	10
C	0	0	10

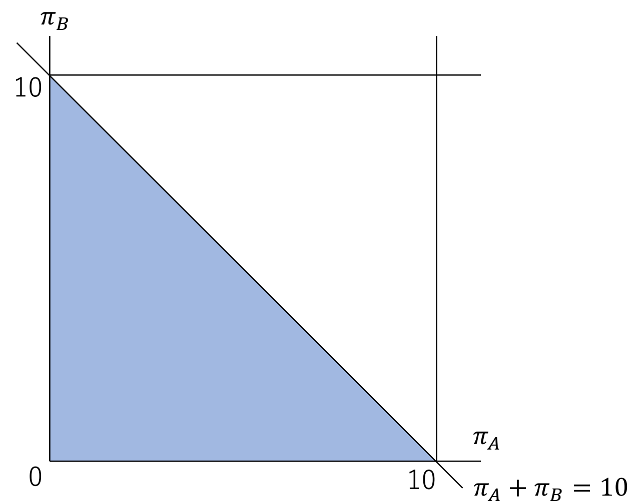
再びこの例を考える．

効率的財配分：財X,Yを入札者A,Bがそれぞれ獲得して，総余剰$w(N)=20$．財を手に入れられない入札者Cは$\pi_C=0$

提携{0,C}によるブロックが起こらない条件は$\pi_0+\pi_C=\pi_0\geq 10$であるからコアは

$$Core(N,w)=\{\pi\geq 0|\pi_0+\pi_A+\pi_B=20, \pi_A+\pi_B\leq 10, \pi_C=0\}$$

コアの範囲



モデル

メカニズムは申告された価値評価関数の組 $\hat{v} = (\hat{v}_i)_{i \in N_{-0}}$ に対して，財配分を決める関数$g : V^n \to \mathrm{X}$と,各人の支払額を決める関数 $\mathrm{p} : V\text{^}n \to \mathbb{R}^n$によって定義される

財配分は常に申告された価値評価に対して効率的であるとして：

$$g(\hat{v}) \in \arg\max_{x \in X} \sum_{i \in N} \hat{v}_i(x_i)$$

任意のメカニズムを所与としたとき，申告された価値評価$\hat{v}$を基に計算される各入札者の利得を$\hat{\pi}_i = \hat{v}_i\big(g_i(\hat{v})\big) - p_i(\hat{v})$と表し，また$\hat{\pi}_0 = \pi_0$とする．任意の申告された価値評価$\hat{v}$のもとで常に

$$\hat{\pi} \in Core(N, w(\cdot\,|\hat{v}))$$

が成り立つとき，メカニズム(g,p)は**コア選択オークション**であるという

代表的なコア選択オークション

1. 一位価格オークション：各入札者が申告した価格をそのまま支払う
2. **VCG近似コア選択オークション**：VCGメカニズムの支払額とのユークリッド距離が最小となるように支払額を決める

申告された価値評価のもとでの効率的な配分を$x^* = g(\hat{v})$とすると，VCGメカニズムにおける各入札者の支払額は

$$p_i^{VCG}(\hat{v}) = w(N_{-i}|\hat{v}) - \sum_{j \neq i} \hat{v}_j(x_j^*)$$

この時，VCG近似コア選択オークションの支払額は,

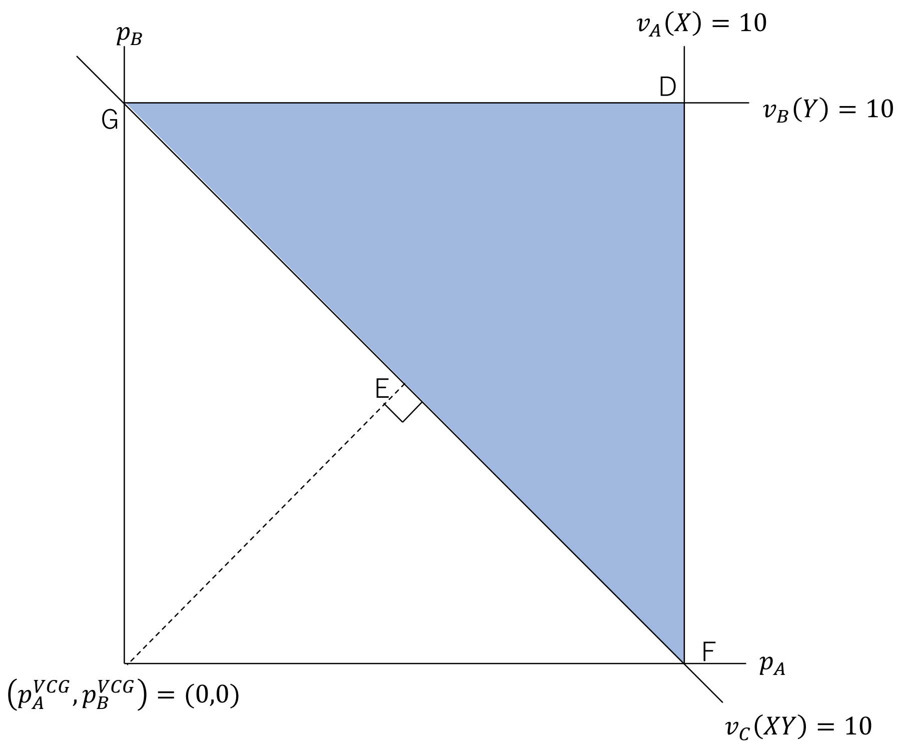
$$\min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i \in N_{-0}} \left(p_i - p_i^{VCG}(\hat{v})\right)^2 \qquad s.t. \hat{\pi} \in Core(N, w(\cdot\,|\hat{v}))$$

の解として定義される.

VCG近似コア選択オークション

入札者	X	Y	XY
A	10	0	10
B	0	10	10
C	0	0	10

上記の例における $\min_{p \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i \in N_{-0}} \left(p_i - p_i^{VCG}(\hat{v})\right)^2 \quad s.t. \hat{\pi} \in Core(N, w(\cdot\,|\hat{v}))$ の解



アミ掛け部分：コア選択オークションの範囲

点D：一位価格オークションの支払額

点E：VCG近似コア選択オークションの支払額

VCGメカニズムとコア配分の関係(1)

方向性1：どのような環境であればコアと耐戦略性が両立可能か

→ VCGメカニズムで実現する配分がコアに属するのはどのようなときか

各入札者が真の価値評価を申告したときの各入札者のVCGメカニズムでの利得を「**VCG利得**」と呼び，$\bar{\pi}_i$とすると

$$\bar{\pi}_i = v_i(g_i(v)) + \sum_{j \neq i} v_j\left(g_j(v)\right) - w(N_{-i}) = \underline{w(N) - w(N_{-i})}$$

入札者iが社会に参加することで
発生する社会的余剰の増加分

入札者iのVCG利得 = 社会Nに対する自身の**限界貢献度**

この性質より：

任意のコア配分$\pi \in Core(N, w)$は効率的だから，

$$\sum_{i \in N} \pi_i = w(N)$$

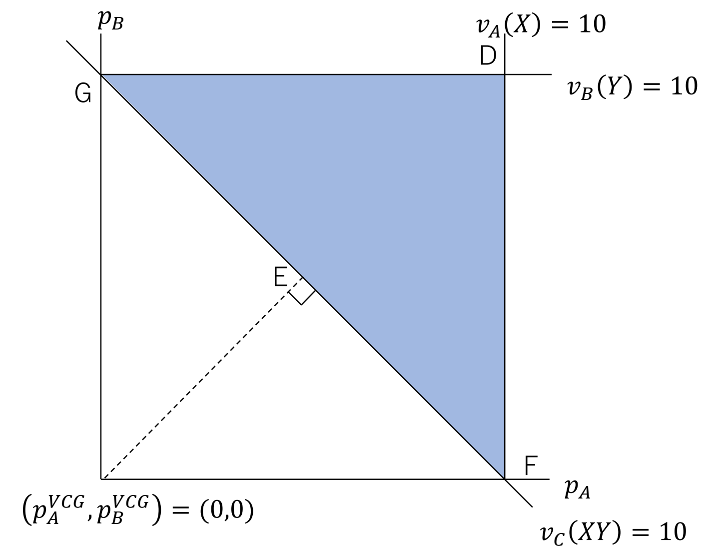
更に，πは提携N_{-i}によってブロックされないから，

$$\sum_{j \neq i} \pi_j \geq w(N_{-i})$$

上２式の差を取ると，

$$\pi_i \leq w(N) - w(N_{-i})$$

命題 1.　各入札者がコアにおいて得られる利得は高々VCG利得



確かにA,Bがそれぞれ VCG利得を得るようなコア配分が存在する(F,G)　but...

すべての入札者が同時にVCG利得を得るような配分（VCG配分）がコアに属するのはどのようなときか

VCGメカニズムとコア配分の関係(2)

すべての入札者が同時にVCG利得を得るような配分（VCG配分）がコアに属するのはどのようなときか

次の条件を導入する

定義 1　（BSM条件）． 提携値関数wが任意の売り手を含む提携S, Tについて

$$w(S) + w(T) \geq w(S \cup T) + w(S \cap T)$$

を満たすとき，wは**入札者劣モジュラー（bidder submodular）**であるいう．

これを言い換えると：任意の売り手を含む提携$S, T (S \subseteq T)$と任意の$i \in S_{-0}$について，

$$w(S) - w(S_{-i}) \geq w(T) - w(T_{-i})$$

すなわち，BSM条件は，提携がより大きくなるほど入札者iの提携に対する限界貢献度が小さくなることを意味する．

→ BSM条件は，VCG配分がコアに属するための十分かつほぼ必要条件

命題 2.　以下の(1)と(2)は同値である．

(1)提携値関数wが入札者劣モジュラーである

(2)任意の売り手を含む提携$S \subseteq N$について，

$$Core(S, w) = \left\{ \pi \geq 0 | \sum_{i \in S} \pi_i = w(S), (\forall i \in S_{-0}) 0 \leq \pi_i \leq \bar{\pi}_i^S \right\}$$

ただし，　$\bar{\pi}_i^S \equiv w(S) - w(S_{-i})$とする．

詳細な証明は略．

大雑把には，BSM条件とは各入札者の限界貢献度が提携のサイズついて減少関数になることだから，「全体提携を除く最も大きな提携N_{-i}がブロックしない」条件のみがコアの制約条件になる．各入札者のVCG利得は提携N_{-i}にブロックされないような利得（の上限）なので，VCG配分はコアに属する．

VCGメカニズムとコア配分の関係(3)

VCG配分がコアに属するためには提携値関数が劣モジュラーになっていることがほぼ必要十分.

→ 各人の価値評価関数v_iがどのような性質を満たせば，提携値関数が劣モジュラーになるのか.

命題 3 (Ausubel and Milgrom 2002)．すべての$i \in N_{-0}$について，v_iが代替性条件を満たすならば提携値関数wは入札者劣モジュラーである.

（任意の財について，ほかの財の価格の上昇に対して需要量が減少しないとき，財は代替であるといい，価値評価関数v_iは代替性条件を満たすという）

証明は略.

命題3はつまり，価値評価関数の代替性条件がBSM条件のための十分条件であるということ.

命題3の逆は必ずしも真ではないが，次の命題は代替性条件がBSM条件のためのほぼ必要条件であることを示している.

命題 4 (Ausubel and Milgrom 2002)．入札者の数$n \geq 4$であり，入札者１の価値評価関数v_1が代替性条件を満たさないとする.この時，代替性条件を満たす価値評価関数の組v_{-1}が存在して，提携値関数wは入札者劣モジュラーではない.

証明　財の個数が2であるとき，明大４はn=3でも成り立ち，以下のように直接的に証明できる.

財の集合を$\{A,B\}$とすると，入札者１の任意の価値評価関数は$v_1(A)=a,\ v_1(B)=b,\ v_1(AB)=a+b+c(a,b\geq 0, c>0)$と表せる.

これに対し，v_2, v_3を$v_2(A)=a,\ v_2(B)=b+c,\ v_2(AB)=a+b+c,\quad v_3(A)=a+d(d>c)$と定義する．この時,

$$w(0123)=w(023)=a+b+c+d,$$
$$w(012)=a+b+c,$$
$$w(013)=a+b+d,$$
$$w(01)=a+b+c$$

より，$w(0123)-w(013)=c>w(012)-w(01)=0$　となり，BSM条件を満たさない.

VCGメカニズムとコア配分の関係（まとめ）

VCG配分がコアに属するためにはすべての入札者にとって財が**代替財**であることがほぼ必要かつ十分条件.

→ 可能な価値評価関数の集合Vが代替性条件を満たす価値評価関数のみであるならば（かつ各人はVに含まれる価値評価関数のみを申告できるのならば），耐戦略的なコア選択オークションが存在してそれはVCGメカニズムに他ならない.

系 1. 代替性条件を満たす価値評価関数の集合をV^Sとする．$V \subseteq V^S$であるならば，VCGメカニズムはコア選択オークションである.

しかし，多くの現実のオークション事例では**補完財**があると考えられている.

→ この場合コアと耐戦略性は両立できない

では，補完財の存在を考慮したとき，コア選択オークションで入札者がどのような戦略的行動をとり，均衡においてどのような配分が実現されるのか.

コア選択オークションの均衡

<u>方向性２：コア選択オークションが耐戦略性を満たさないなら均衡でどのような配分が実現されるのか</u>

複数財オークションでは入札者の持つ価値評価の情報は多次元

→ 通常は各入札者の財に対する評価額はその入札者のみが知る私的情報であると仮定し，不完全情報ゲームとして均衡分析をするが，多次元の私的情報があるときのオークションの均衡分析は複雑すぎる.

→ 各人の価値評価が入札者間で共有知識となっているような**完備情報**のケースを仮定する.

以下ではDay and Milgrom(2008)に従って，<u>真のコア配分を実現するような完備情報下のナッシュ均衡</u>が存在することを示す

一般に完備情報の仮定の下では，コア選択オークションのナッシュ均衡は無数

→ 各人が申告する価値評価関数の中で財配分や支払額の決定に本質的に関係ない部分については何を申告しても均衡になってしまうから

（例えば他の入札者に比べて相対的に評価額の低い財のパッケージに対しては，どのような評価額を申告してもオークションの結果には影響を及ぼさないはず（どうせ落札しないから））

→ ある特定の戦略に着目する

完備情報下のナッシュ均衡(1)

定義 2（切り詰め戦略）．価値評価関数v_iに対して，定数$\alpha_i \geq 0$が存在して，任意の$x_i \in X_i$について

$$\hat{v}_i(x_i) = \max\{v_i(x_i) - \alpha_i, 0\}$$

であるとき，$\hat{v}_i$を「v_iのα_i切り詰め戦略」と呼ぶ.
（任意の財の組み合わせに対して真の評価額から一定額だけ差し引いて申告する戦略）

完備情報下のオークションの均衡では効率的財配分が複数になる場合（タイケース）が生じうるが，簡単のためタイケースでは特定の入札者や配分が優先的に選ばれることを仮定する．命題 5 では入札者iが優先的に選ばれるものとする.

命題 5. 任意の入札者i以外の申告の組$\hat{v}_{-i}$に対して，

$$\bar{\pi}_i \equiv w(N|v_i, \hat{v}_{-i}) - w(N_{-i}|v_i, \hat{v}_{-i})$$

とする．この時，任意のコア選択オークションにおいて，v_i の $\bar{\pi}_i$ 切り詰め戦略は$\hat{v}_{-i}$ に対する最適応答になっている.

証明． 入札者iが$\hat{v}_i$を申告して，利得$\pi_i > \bar{\pi}_i$を得られたと仮定する．このとき，申告の組$\hat{v}$で計算した利得配分を$\hat{\pi}$，実現した財配分を$\hat{x}$，iの支払い額を$\hat{p}_i$とすると，財配分の効率性から，

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} \hat{\pi}_j &= w(N|\hat{v}) - \hat{\pi}_i \\
&= \sum_{j \in N} \hat{v}_j(\hat{x}_j) - \big(\hat{v}_i(\hat{x}_i) - \hat{p}_i\big) \\
&= \sum_{j \neq i} \hat{v}_j(\hat{x}_j) + v_i(\hat{x}_i) - \big(v_i(\hat{x}_i) - \hat{p}_i\big) \\
&< w(N|v_i, \hat{v}_{-i}) - \bar{\pi}_i \\
&= w(N_{-i}|v_i, \hat{v}_{-i}) = w(N_{-i}|\hat{v})
\end{aligned}$$

厳密な不等号は$v_i(\hat{x}_i) - \hat{p}_i = \pi_i > \bar{\pi}_i$から得られる．したがって，$\hat{\pi} \in Core(N, w(\cdot|\hat{v}))$に矛盾する．ゆえに，$i$が最適反応で得られる利得は高々$\bar{\pi}_i$である．以下では$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略によって，少なくとも利得$\bar{\pi}_i$を得られることを示す.

ケース1：$\bar{\pi}_i = 0$のとき．入札者iは「0切り詰め戦略」，すなわち真の評価額を申告すれば，個人合理性により少なくとも非負の利得を得ることができる．したがって，$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略は最適反応になっている.

ケース2：$\bar{\pi}_i > 0$のとき．価値評価の組$(v_i, \hat{v}_{-i})$のもとでの効率的財配分をx^*とする．$w(N|v_i, \hat{v}_{-i}) > w(N_{-i}|v_i, \hat{v}_{-i})$より，$x_i^* \neq \emptyset$かつ$v_i(x_i^*) \geq \bar{\pi}_i$となっている．入札者$i$が$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略をとったとき，

$$\begin{aligned}
\max \sum_{j \in N} \hat{v}_j(x_j) &\geq \max\left\{\sum_{j \neq i} \hat{v}_j(x_j) + v_i(x_i) - \bar{\pi}_i\right\} \\
&= w(N|v_i, \hat{v}_{-i}) - \bar{\pi}_i \\
&= w(N_{-i}|v_i, \hat{v}_{-i}) = w(N_{-i}|\hat{v})
\end{aligned}$$

最初の不等式は$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略の定義から得られるが，厳密な不等号は成り立たない．なぜならば，厳密な不等号が成り立つことは，$\hat{v}_i(x_i) = 0$なる財配分xが選ばれることを意味し，$\max \sum_{j \neq i} \hat{v}_j(x_j) > w(N_{-i}|\hat{v})$となって矛盾が生じてしまうためである．したがって，x^*は申告のもとで効率的な財配分の1つになっている．タイブレークではiが優先されるので，iは必ず財x_i^*を獲得する．$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略をとった結果，iが$v_i(x_i) \geq \bar{\pi}_i$を満たす$x_i$を獲得するならば，個人合理性$\hat{\pi}_i \geq 0$により，少なくとも$\bar{\pi}_i$以上の利得が得られる．したがって，$\bar{\pi}_i$切り詰め戦略は最適反応になっている． □

完備情報下のナッシュ均衡(2)

任意の他の入札者の戦略に対して切り詰め戦略による最適反応が存在する

→ 各入札者が切り詰め戦略を用いるナッシュ均衡が存在する

真のコア配分$\pi \in Core(N, w(\cdot|v))$に対して，すべての$i$について$\pi'_i \geq \pi_i$を満たす$\pi' \in Core(N, w) \setminus \{\pi\}$が存在しないとき，すなわち（売り手を除いた）全入札者の間でパレート最適になっているコア配分を入札者最適コア配分と呼び，入札者最適コア配分の集合を

$$BOC(N, w(\cdot|v)) \subseteq Core(N, w(\cdot|v))$$

で表す．タイケースにおいて真の効率的財配分が優先的に選ばれるものと仮定すると，

命題 6. $\pi \in BOC(N, w(\cdot|v))$とする．この時，任意のコア選択オークションにおいて，各入札者がπ_i切り詰め戦略を取るのはナッシュ均衡であり，その時の配分はπとなる．

証明は入札者最適コア配分πに対して，入札者i以外がπ_j切り詰め戦略を取っているとき，

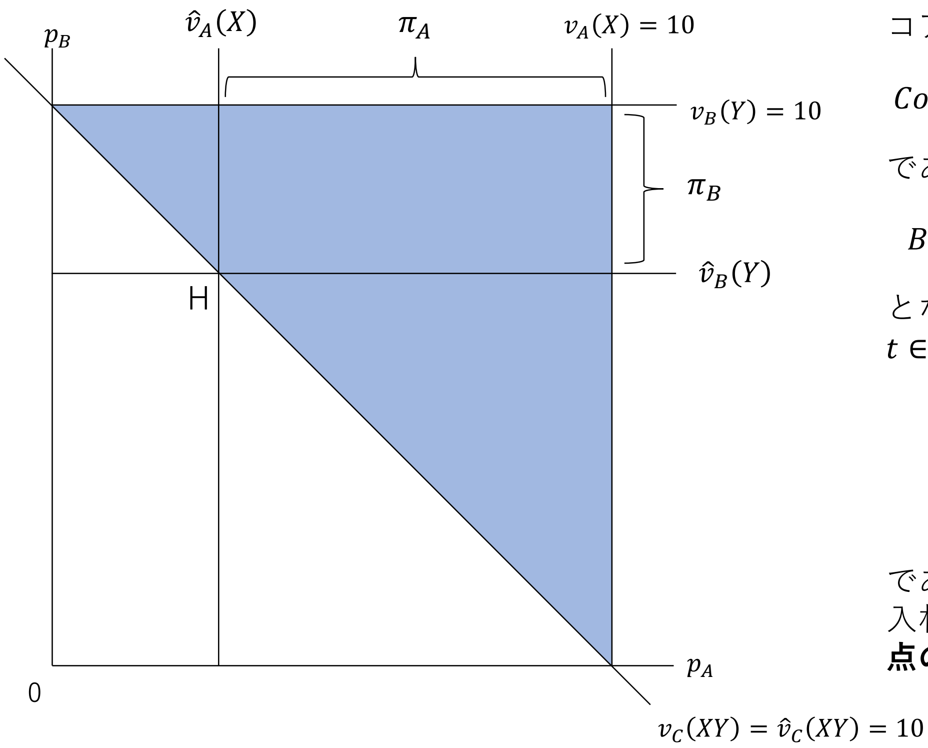
$$\pi_i = w(N|v_i, \hat{v}_{-i}) - w(N_{-i}|v_i, \hat{v}_{-i})$$

が成り立っていることをしめせばよい．（略）

完備情報下のナッシュ均衡(3)

- 命題1，2よりもしもVCG配分がコアに属するのであれば，入札者最適コア配分は一意に定まり，VCG配分に一致する．この時命題6の均衡ではVCG配分が実現されている
- VCG配分がコアに属さないときは，入札者最適コア配分は複数存在し，そのそれぞれを実現するナッシュ均衡が存在する

例において



コア配分は

$$Core(N, w) = \{\pi \geq 0 | \pi_0 + \pi_A + \pi_B = 20, \pi_A + \pi_B \leq 10, \pi_C = 0\}$$

であるから，入札者最適コアは

$$BOC(N, w) = \{(\pi_0, \pi_A, \pi_B, \pi_C) | \pi_0 = 10, \pi_A + \pi_B = 10, \pi_C = 0\}$$

となる．したがって命題６で示されたナッシュ均衡は任意の$t \in [0,10]$に対して，

$$\hat{v}_A(X) = t,$$
$$\hat{v}_B(Y) = 10 - t,$$
$$\hat{v}_C(XY) = 10$$

である．この申告のもとでは効率的な配分はタイになるが，入札者A, Bが優先される．**申告のもとでのコア配分は点Hの１点のみとなっている．**

コア選択オークションと均衡同値性

- 完備情報化のナッシュ均衡の議論において，コア選択オークションの支払ルールpを特定しなかった

命題６の均衡では，実現する配分πに対して各入札者はぎりぎりまで申告を切り詰める

→ 申告のもとでのコアは唯一$(w(N|\hat{v}),(0)_{i\in N_{-0}})$のみ

＝ 支払ルールに関係なく同一の配分が実現される

均衡同値性：任意のコア選択オークションにおいて，同一の切り詰め戦略の組がナッシュ均衡になり，同一の均衡配分をもたらす

⇕

オークション理論における**収入同値定理**の完備情報バージョン

ある一定の仮定の下での任意のオークション方式において，売り手の得る期待収入が等しくなるという定理

また均衡同値性はコア選択オークション以外のメカニズムに対しても成り立つ

→ Sano(2013)によると，均衡同値性の（ほぼ）必要十分条件が「各入札者の支払額が少なくともVCGメカニズムの支払額以上である」ことである（つまり，VCGメカニズムにおいても均衡同値性が成り立つ）

不完備情報の均衡分析

簡単な例

入札者	X	Y	XY
A	a	0	a
B	0	b	b
C	0	0	c

- 各人がどの財に興味があるかはプレーヤー間で共有知識
- 評価額a,b,cは私的情報
- 各人は自分の需要する財の評価額のみを売り手に申告し，申告された評価額は$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$

入札者Cについて

- $\hat{a}+\hat{b}<\hat{c}$のとき財XYを獲得
- コアになるような支払額は$p_C \in [\hat{a}+\hat{b}, \hat{c}]$
- VCGメカニズムの支払額は$p_C^{VCG}=\hat{a}+\hat{b}$

→ コアと耐戦略性を両立可能

入札者A,Bについて

- $\hat{a}+\hat{b}>\hat{c}$のときそれぞれ財X,Yを獲得
- コアになるような支払額の組は$\{(p_A, p_B) | p_A \leq \hat{a}, p_B \leq \hat{b}, p_A+p_B \geq \hat{c}\}$
- VCGメカニズムの支払額は$(p_A^{VCG}, p_B^{VCG})=(\max\{\hat{c}-\hat{b}, 0\}, \max\{\hat{c}-\hat{a}, 0\})$

→ コアと耐戦略性が両立できない

➢ 入札者Cが正直に入札することを前提としてA,Bのインセンティブを考えると

A,Bのどちらかが高い評価額を申告すれば，入札者Cが財XYを落札することを防げるが，互いに相手のビッドにフリーライドするインセンティブが働くため，均衡では互いに真の評価額より低い額を申告する

→ 均衡（ベイジアン―ナッシュ均衡）では効率的な財配分を実現できない

⇕

複数財のコア選択オークションでは，配分される財の一部のみを需要する「小入札者」の間でフリーライダー問題が発生する（公共財ゲームの状況と同じ！）

他の不完備情報下の具体的な均衡戦略に関する興味深い結果はまだあまり得られていない……

第２章まとめと展望

- 財が代替財であるときVCG配分はコアに属する
- 財の間に補完性があるような現実的な環境では，一般にコア選択オークションは耐戦略性を満たさず，秦のコアに属する配分の達成は保証されない
- しかし，各入札者の価値評価が共有知識となっている完備情報下では真のコアを実現するようなナッシュ均衡が存在する（均衡同値性）
- 不完備情報下での均衡分析についてはまだ不明な点が多く，「どのような具体的なコア選択オークションのルールが好ましいか」という問いにあまり示唆を得られていない

シェア型交通におけるオークションの適用

シェア型交通で発生する問題

- 空間的な車両分布の偏りとOD需要の偏りの不一致→乗りたくても乗れない
- ↑を解決するために車両移動のためのドライバーの採用→コストが高い

シェア型交通を利用するための「**取引可能な利用権**」を導入

- 時間に余裕がある人は車が来るまで待てない人に利用権を売ればいい
- 利用権の価格は市場原理の下で決定される
- 結果として社会全体の交通費用が最小化される→効率性が満たされる

Hara and Hato(2017)によると，このモビリティシェアオークションの下では利用枠の価格は「**Oのポートを出発するための料金**」と「**Dのポートにたどり着くことの収入**」に分解される

OD需要の偏りが大きいとき，シェア型交通を使うことに利益が発生し得る

→ オークション下で車両分布の偏りが自然に調整される

シェア型交通におけるオークションの適用

現実的には取引費用，選好表明コストの観点から難しい

<u>利用権枠の予約方法が重要</u>

- Artificial payment
- 浮動型の予約　　　　　　　　　　　など

今の地方都市：全員が自家用車で好き好きに活動を行い，移動している

⇩

オークションメカニズムのデザインによって，個人間のODが重なる・連続するよう需要を調節できないかを考える

- シェア型交通を使うよりも，自家用車を使った方が効用が高くならない（シェア型交通の利用から逸脱しない）ような料金決定メカニズム・ポートの配置
- 需要の調整コストが個人によって，またはwith whomによって違う

などがポイント