

対象書籍

Tien Mai, “A method of integrating correlation structures for a generalized recursive route choice model”, Transportation Research Part B, Vol. 93, pp. 146-161, 2016.

2018/9/8 (土) 夏の理論合宿2018

修士2年 山野 壱成

はじめに

離散選択モデルの課題

- ・ 経路選択肢が不明
- ・ 経路同士の間関係

RLファミリーは経路選択肢の列挙なしで連続的に推定できる特徴を持つ

RLモデルは各選択肢でMNLのように振る舞う (IIA特性を持つ)

NRLモデルは各選択肢において次状態への遷移に関する間関係を考慮して緩和
しかし後続の状態における間関係までは考慮できていない

→ **RCNL** (Recursive Cross Nested Logit) モデルの提案
(RNMEV (Recursive network MEV) モデルの1つ)

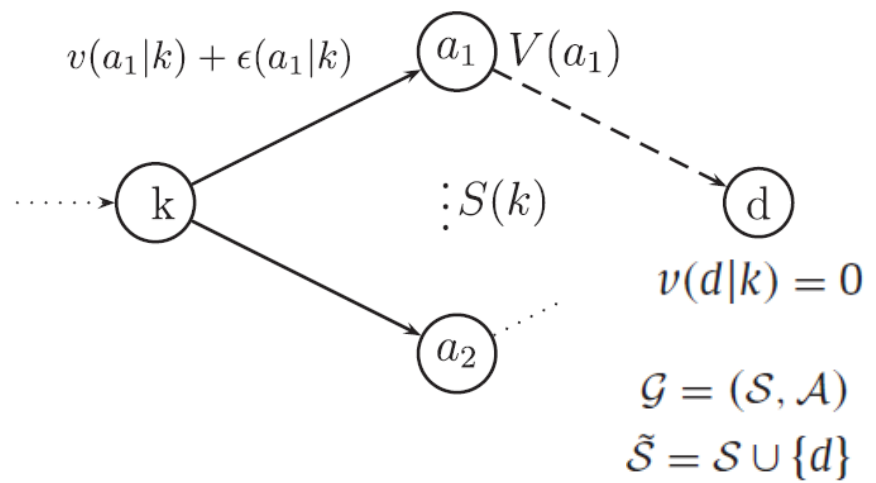
RNMEVモデルは各選択肢でCNLのように間関係を考慮して選択行動を記述可能
しかし既存の推定方法では推定が難しい

→ **間関係構造を交通ネットワークに統合**して推定を簡単にする

GRLモデルの導入

設定

- ・ 経路選択をリンクに関する動的離散選択モデルとしてモデル化
- ・ 各ノードにおいてそのノードに接続するリンク集合が選択肢
- ・ リンク遷移から得る瞬間効用と終点までの期待最大効用に基づいて選択を行う
- ・ 誤差項はタイプの極値分布に従う (iid)
- ・ 各ステップでの選択はn-MEVモデル



状態kからaへの遷移による瞬間効用は

$$u^n(a|k; \beta) = \underbrace{v^n(a|k; \beta)}_{\text{確定効用}} + \underbrace{\epsilon(a|k; \beta)}_{\text{MEV分布に従う}} - \frac{\gamma}{\underbrace{\mu_k(\beta)}_{\text{誤差項の平均を0にする}}}, \forall k \in \mathcal{S}, a \in S(k),$$

個人nを省略して選択する状態は

$$\operatorname{argmax}_{a \in S(k)} \left\{ \underbrace{v(a|k; \beta) + V^d(a; \beta)}_{\text{期待最大効用}} + \epsilon(a|k; \beta) - \frac{\gamma}{\mu_k(\beta)} \right\}, \forall k \in \mathcal{S},$$

GRLモデルの導入

$$V^d(k; \beta) = \mathbb{E} \left[\max_{a \in S(k)} \left(v(a|k; \beta) + V^d(a; \beta) + \epsilon(a|k; \beta) - \frac{\gamma}{\mu_k(\beta)} \right) \right], \forall k \in \mathcal{S}.$$

ただし, $V^d(d) = 0$.

Bellman方程式を用いて,

$$V(k) = \frac{\ln G_k \left(e^{v(a|k)+V(a)}, a \in S(k) \right)}{\mu_k}, \forall k \in \mathcal{S}. \quad (2)$$

ここで $Y_k = e^{\mu_k V(k)}$, $\forall k \in \tilde{\mathcal{S}}$ を定義すると

$$Y_k = \begin{cases} G_k(e^{v(a|k)} Y_a^{1/\mu_a}, a \in S(k)), & \forall k \in \mathcal{S} \\ 1 & \text{if } k = d \end{cases}$$

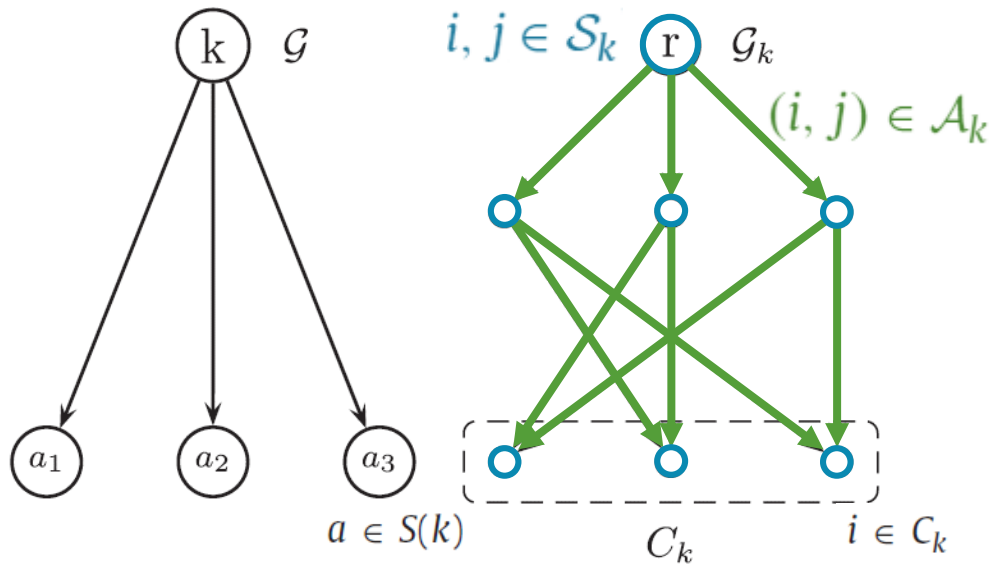
さらに遷移選択確率は

$$P(a|k) = \delta(a|k) \frac{y(a|k) \frac{\partial G_k}{\partial y(a|k)}(y(a'|k), a' \in S(k))}{\mu_k G(y(a'|k), a' \in S(k))}, \forall k, a \in \tilde{\mathcal{S}}.$$

したがって経路の選択確率は $(y(a|k) = e^{v(a|k)} Y_a^{1/\mu_a})$

$$P(\sigma) = \prod_{i=0}^{l-1} P(k_{i+1}|k_i)$$

RNMEVの導入



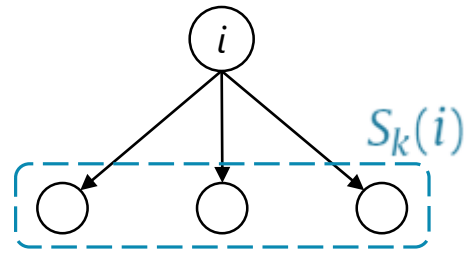
- 各状態kで相関構造 $\mathcal{G}_k = (\mathcal{S}_k, \mathcal{A}_k, \mathcal{C}_k)$ を持つ
- \mathcal{S}_k : 状態集合, \mathcal{A}_k : 接続集合, \mathcal{C}_k : 代替選択肢となる状態集合
- n-MEVモデルにおいては $\mathcal{C}_k \equiv \mathcal{S}(k)$, $k \equiv r$ となる
- 各状態では正のスケール ξ_i^k を, 各接続では正のパラメータ α_{ij}^k を持つ

G関数は

$$G_k^i(y) = y_i^{\xi_i^k}, \quad i \in \mathcal{C}_k,$$

$$G_k^i(y) = \sum_{j \in \mathcal{S}_k(i)} \alpha_{ij}^k (G_k^j(y))^{\xi_i^k / \xi_j^k}, \quad \forall i \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{C}_k,$$

$$G_k(y) = G_k^r(y)$$

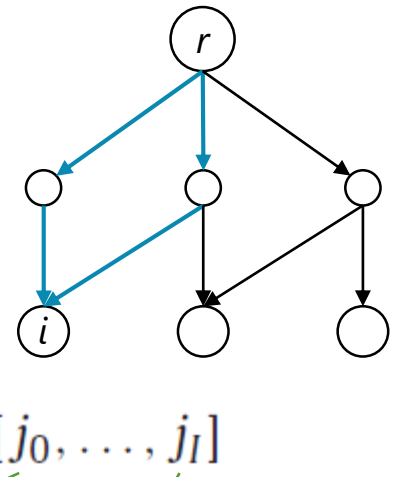


RNMEVの導入

$G_k(y) = G_k^r(y)$ であることから $\xi_r^k = \mu_k$

代替選択肢状態の選択確率は

$$P_k(i|C_k; y) = \sum_{[j_0, \dots, j_l] \in \Omega^k(i)} \prod_{t=0}^{l-1} \frac{\alpha_{j_t j_{t+1}}^k (G_k^{j_{t+1}}(y))^{\xi_{j_t}^k / \xi_{j_{t+1}}^k}}{G_k^{j_t}(y)}$$



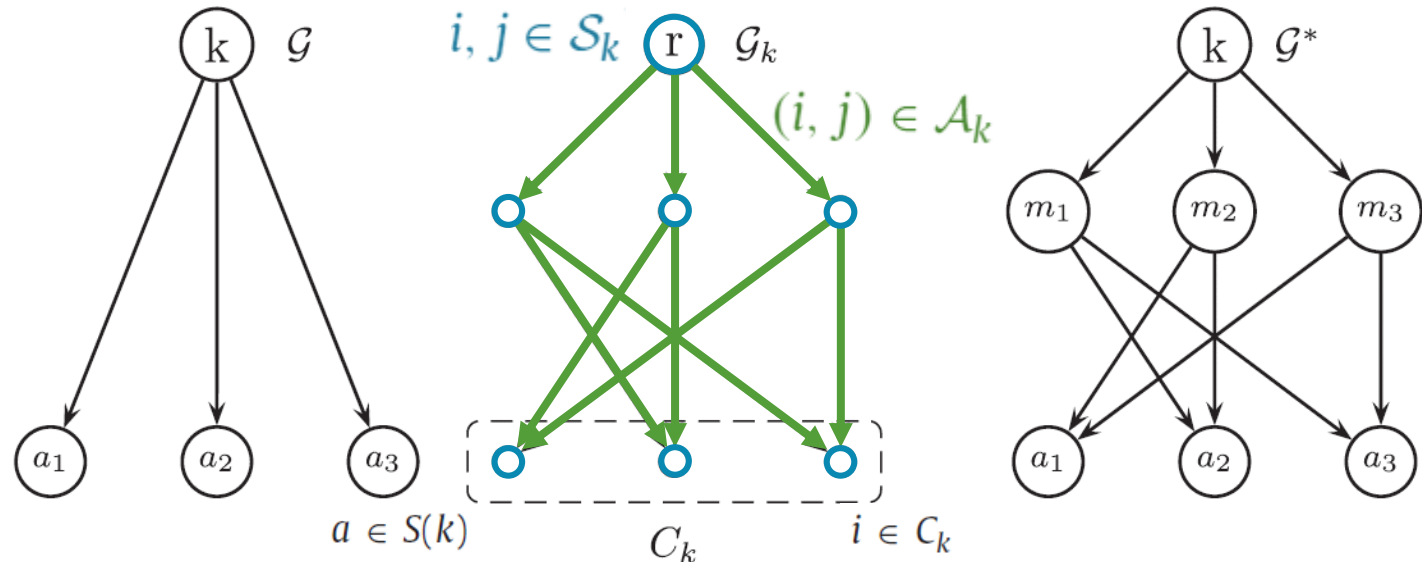
($\Omega^k(i)$: 状態kにおける相関構造上の初期状態rから状態iへの経路)

RNMEVの推定ではBellman方程式 $V = \mathcal{T}_\beta(V)$ を繰り返し計算で解く

→この計算は帰納的計算から得られるG関数で定義されるため複雑

価値関数や選択確率の計算を簡単にするため
相関構造を実ネットワークに組み込む

相関構造のネットワーク統合



- \mathcal{S}_k と \mathcal{A}_k を実ネットワーク $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ に組み込めば良い ($C_k \equiv S(k)$)
- 統合ネットワーク $\mathcal{G}^* = (\mathcal{S}^*, \mathcal{A}^*)$ で $\mathcal{S}^* = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} \mathcal{S}_k$ and $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_k$
- 統合ネットワークは以下の性質を持つ
 - Given a state $i \in \mathcal{S}^*$, there is a state $k \in \mathcal{S}$ such that $i \in \mathcal{S}_k$.
 - Given a state $i \in \mathcal{S}^*$, if $i \notin \tilde{\mathcal{S}}$ then there exists only one state $k \in \mathcal{S}$ such that $i \in \mathcal{S}_k$.
 - Given a state $i \in \mathcal{S}_k$, if $i \in \tilde{\mathcal{S}}$ then $i = k$ or $i \in S(k)$.
 - Given a state $i \in \mathcal{S}_k$, if $i \notin C_k$ then $S_k(i) = S^*(i)$.
 - $\tilde{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}_k = \{k\} \cup S(k)$ and $|\mathcal{S}^*| = |\tilde{\mathcal{S}}| + \sum_{k \in \mathcal{S}} (|\mathcal{S}_k| - |S(k)| - 1)$.
 - $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_h = \emptyset \ \forall k, h \in \mathcal{S}, k \neq h$ and $|\mathcal{A}^*| = \sum_{k \in \mathcal{S}} |\mathcal{A}_k|$.

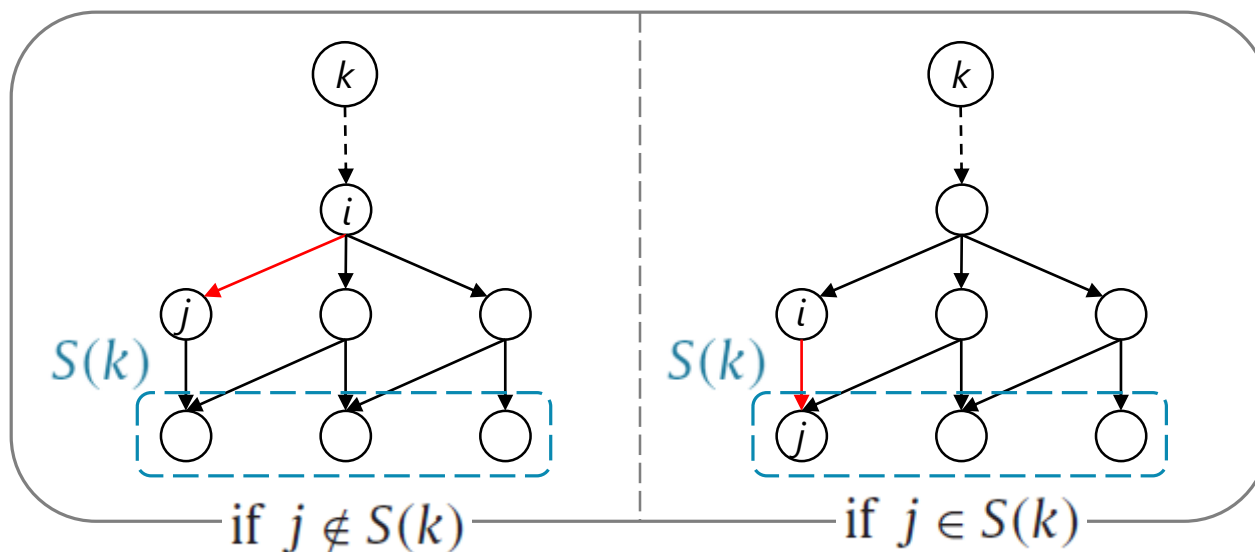
相関構造のネットワーク統合

- 各状態 i は以下の正のパラメータを持つ

$$\mu_i^* = \begin{cases} \mu_i & \text{if } i \in \tilde{\mathcal{S}} \\ \xi_i^k & \text{if } i \notin \tilde{\mathcal{S}}, i \in \mathcal{S}_k, k \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (10)$$

- $(i, j) \in \mathcal{A}_k, k \in \mathcal{S}$ の遷移の瞬間効用の確定項は

$$v^*(j|i) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha_{ij}^k}{\mu_i^*} & \text{if } j \notin S(k) \\ \frac{\ln \alpha_{ij}^k}{\mu_i^*} + v(j|k) & \text{if } j \in S(k) \end{cases} \quad (11)$$



統合ネットワーク上のNRL記述

$\underline{k, a \in \mathcal{S}^*}, a \in \mathcal{S}^*(k)$ を満たす状態間遷移の瞬間効用は式(10),(11)を使って

$$u^*(a|k) = v^*(a|k) + \frac{\epsilon(a) - \gamma}{\mu_k^*}$$

状態 k における期待最大効用は

$$V^*(k) = \mathbb{E} \left[\max_{a \in \mathcal{S}^*(k)} \left\{ v^*(a|k) + V^*(a) + \frac{\epsilon(a) - \gamma}{\mu_k^*} \right\} \right]$$

ログサム用いて

$$\mu_k^* V^*(k) = \ln \left(\sum_{a \in \mathcal{S}^*(k)} e^{\mu_k^* (v^*(a|k) + V^*(a))} \right), \forall k \in \mathcal{S}^* \setminus \{d\}$$

要素数が $|\mathcal{S}^*|$ で、各要素が $Y_k^* = e^{\mu_k^* V^*(k)}$ であるベクトル Y^* を定義して

$$Y_k^* = \begin{cases} \sum_{a \in \mathcal{S}^*(k)} e^{\mu_k^* v^*(a|k)} (Y_a^*)^{\mu_k^* / \mu_a^*} & \text{if } k \neq d \\ 1 & \text{if } k = d \end{cases} \quad (15)$$

よって確率は

$$P^*(a|k) = \delta^*(a|k) \frac{e^{\mu_k^* v^*(a|k)} (Y_a^*)^{\mu_k^* / \mu_a^*}}{Y_k^*}, \forall k, a \in \mathcal{S}^* \quad (16)$$

RNMEVとNRLの比較

定理1.

Y^* が式(15)の非線形方程式の解であるとき,

$$Y_k^* = G_k \left(e^{\nu(a|k)} (Y_a^*)^{1/\mu_a}, a \in S(k) \right), \forall k \in \mathcal{S}$$

⇒NRLのBellman方程式の解がRNMEVのそれと同じ

定理2.

Y^* が式(15)の非線形方程式の解で $Y_k = Y_k^*, \forall k \in \tilde{\mathcal{S}}$ であるとき,

$$P(a|k) = \sum_{[a_0, \dots, a_l] \in \Omega^k(a)} \prod_{t=0}^{l-1} P^*(a_{t+1}|a_t), \quad \forall k \in \mathcal{S}, a \in S(k)$$

⇒NRLにおける選択確率がRNMEVにおけるそれと同じ

RNMEVの価値関数と選択確率は
統合ネットワーク上におけるNRLのそれと同じ
⇒NRLのもので代用可能（計算が比較的容易）

RNMEVの推定

NFPアルゴリズム

動的離散選択モデルの推定で最も良く使われる手法。
外側で非線形最適化，内側でBellman方程式を解く。

NRLモデルの価値関数

一番の課題は 大規模な非線形方程式を解くこと → 行列形に変形

$$Y^* = [M^* \circ X(Y^*)]e + b$$

$$M^* = \{ M_{ka}^* = \delta^*(a|k) e^{\mu_k^* v^*(a|k)}, \quad \forall k, a \in \mathcal{S}^* \}$$

$$X = \{ X(Y^*)_{ka} = (Y_a^*)^{\mu_k^* / \mu_a^*}, \quad \forall k, a \in \mathcal{S}^* \}$$

$$b = \begin{cases} 0 & k \neq d \\ 1 & k = d \end{cases}$$

この行列を反復計算して収束する不動点を探す
(NFPアルゴリズムを適用)

RNMEVの推定

NRLモデル推定における初期値の設定

t-1回目の反復で $\overline{(Y^*)}^{t-1}$ を外側の不動点と仮定

その次のt回目の反復で $(Y^*)^0$ を内側のRLモデルの不動点と仮定

$$err = ||(Y^*)^0 - [M^* \circ X((Y^*)^0)]e + b|| - ||\overline{(Y^*)}^{t-1} - [M^* \circ X(\overline{(Y^*)}^{t-1})]e + b||$$

この値の正負判定で初期値を選択する（スイッチング処理）

$$\begin{cases} (Y^*)^0 & err < 0 \\ \overline{(Y^*)}^{t-1} & err \geq 0 \end{cases}$$

一つ前の反復計算の結果とスイッチング処理を用いて

線形方程式を解くだけでNRLの推定が可能に！

→統合ネットワーク上のNRLモデルを適用することによって

RNMEVの動的精度を含む価値関数と尤度関数の勾配が計算可能

RNMEVの推定

尤度関数は

$$LL(\beta) = \sum_{n=1}^N \ln P(\sigma_n, \beta) = \sum_{n=1}^N \sum_{t=0}^{I_n} \ln P(k_{t+1}^n | k_t^n) \quad (22)$$

式(10)の定義より $\mu_i^* \leq \mu_j^*, \forall i, j \in \mathcal{S}^*, j \in \mathcal{S}^*(i) \setminus \tilde{\mathcal{S}}$.

パラメータの標準化により $\sum_{\substack{i \in \mathcal{S}^* \\ \text{s.t. } j \in \mathcal{S}^*(i)}} (\alpha_{ij}^k)^{\xi_i^k / \xi_j^k} = 1, \forall j \in \mathcal{S}_k, k \in \mathcal{S}$

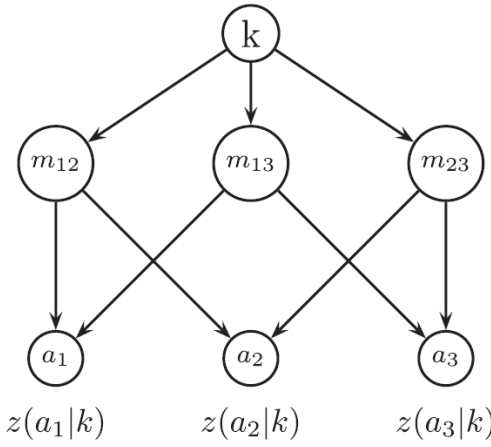
尤度関数の勾配は複雑だが、式(2),(16),(22)を用いて容易に計算できる

$$\frac{\partial Y_k^*}{\partial \beta_i} = Y_k^* \left(\frac{\partial \mu_k^*}{\partial \beta_i} V^*(k) + \frac{\partial V^*(k)}{\partial \beta_i} \mu_k^* \right), \forall k \in \mathcal{S}^*$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \beta_i} = (I - H)^{-1} (L^i e + h)$$

$$\left[\begin{array}{l} L_{ka}^i = \frac{1}{\mu_k^*} \frac{\partial M_{ka}^*}{\partial \beta_i} \frac{(Y_a^*)^{\phi_{ka}^*}}{(Y_k^*)} + \frac{1}{\mu_k^*} M_{ka}^* \ln(Y_a^*) \frac{(Y_a^*)^{\phi_{ka}^*}}{(Y_k^*)} \frac{\partial \phi_{ka}^*}{\partial \beta_i} + M_{ka}^* \ln(Y_a^*) \frac{(Y_a^*)^{\phi_{ka}^*}}{(Y_k^*)} \frac{\partial \mu_a^*}{(\mu_a^*)^2 \partial \beta_i} \\ H_{ka} = M_{ka}^* \frac{(Y_a^*)^{\phi_{ka}^*}}{(Y_k^*)} \quad h_k = -\frac{\partial \mu_k^*}{(\mu_k^*)^2 \partial \beta_i} \ln(Y_k^*) \quad \phi_{ka}^* = \mu_k^* / \mu_a^* \end{array} \right]$$

RCNLモデルの提案



ネストと状態のペアは
1:1対応

ペアの個数(=ネストの個数)は
 $\frac{1}{2}|S(k)| \cdot (|S(k)| - 1)$

- 効用を $z(a|k) = v(a|k) + V(a)$ とおいて誤差項を相関を考慮して設定する
- kの次の状態を考えたときに各状態のペアを取ってネストにする (PCL)
- このときの選択肢間の相関は

$$\widehat{\text{Corr}}(z(a_i|k), z(a_j|k)) = \sum_{m \in S_k(r)} (\alpha_{ma_i}^k \alpha_{ma_j}^k)^{0.5\xi_r^k / \xi_m^k} \left(1 - \left(\frac{\xi_r^k}{\xi_m^k} \right)^2 \right).$$

ネストと状態ペアの構造より

$$\widehat{\text{Corr}}(z(a_i|k), z(a_j|k)) = (\alpha_{m_{ij}a_i}^k \alpha_{m_{ij}a_j}^k)^{0.5\xi_r^k / \xi_{m_{ij}}^k} \left(1 - \left(\frac{\xi_r^k}{\xi_{m_{ij}}^k} \right)^2 \right).$$

- この誤差構造で各ステップでの選択をMNLに見立てた場合も記述できる

• G関数 $G_k(y) = \sum_{m \in S_k(r)} \left(\sum_{a \in S_k(m)} \alpha_{ma}^k y_a^{\xi_m^k} \right)^{\xi_r^k / \xi_m^k}$ より $\sum_{m \in S_k(r)} (\alpha_{ma}^k)^{\xi_r^k / \xi_m^k} = 1$ →RL, NRL

実データへの適用

- Fosgerauの論文のものと同一データ (混雑なし; 旅行時間は静的かつ定数)
- 比較のため, NRLモデル (Mai et al., 2015c) の結果を用いる

NRLモデル

$$\begin{aligned}v^{\text{NRL}}(a|k; \beta) &= v^{\text{RCNL}}(a|k; \beta) = \beta_{TT}TT(a) + \beta_{LT}LT(a|k) + \beta_{LC}LC(a) + \beta_{UT}UT(a|k), \\v^{\text{NRL-LS}}(a|k; \beta) &= v^{\text{RCNL-LS}}(a|k; \beta) = \beta_{TT}TT(a) + \beta_{LT}LT(a|k) + \beta_{LC}LC(a) + \beta_{UT}UT(a|k) + \beta_{LS}LS(a), \\ \mu_k^{\text{NRL}}(\omega) &= e^{\omega_{TT}TT(k) + \omega_{LS}LS(k) + \omega_{OL}OL(k)}, \forall k \in \tilde{\mathcal{S}}\end{aligned}$$

RCNLモデル

適用ネットワークのリンク数7000→各選択で7000個のCNLモデルを定義することに...
→ ξ_r^k and ξ_m^k , $\forall m \in S_k(r)$ を**構造化**してそのパラメータを推定することで回避

$$\xi_r^k(\omega) = e^{\omega_{TT}TT(k) + \omega_{LS}LS(k) + \omega_{OL}OL(k)}, \forall k \in \mathcal{S}.$$

$$\frac{\xi_{m_{ij}}^k}{\xi_r^k} = e^{\lambda_{TT}(TT(a_i) + TT(a_j)) + \lambda_{LS}(LS(a_i) + LS(a_j)) + \lambda_{OL}(OL(a_i) + OL(a_j))}$$

$$\xi_{m_{ij}}^k = \xi_r^k e^{\lambda_{TT}(TT(a_i) + TT(a_j)) + \lambda_{LS}(LS(a_i) + LS(a_j)) + \lambda_{OL}(OL(a_i) + OL(a_j))}$$

すべてのパラメータ α の推定は不可能

→ネストに含まれる代替選択肢aの個数を等しいと仮定して $\alpha_{ma}^k = \left(\frac{1}{|S(k)| - 1} \right)^{\xi_m^k / \xi_r^k}$

実データへの適用

実選択肢間の相関は

$$\widehat{\text{Corr}}(z(a_i|k), z(a_j|k)) = \frac{1}{|S(k) - 1|} \left(1 - \left(\frac{\xi_r^k}{\xi_{m_{ij}}^k} \right)^2 \right)$$

まとめると

$$u^{\text{NRL}}(a|k; \beta, \omega) = v^{\text{NRL}}(a|k; \beta) + \frac{1}{\mu_k^{\text{NRL}}(\omega)} (\epsilon(a) - \gamma),$$

$$u^{\text{NRL-LS}}(a|k; \beta, \omega) = v^{\text{NRL-LS}}(a|k; \beta) + \frac{1}{\mu_k^{\text{NRL}}(\omega)} (\epsilon(a) - \gamma),$$

$$u^{\text{RCNL}}(a|k; \beta, \omega, \lambda) = v^{\text{RCNL}}(a|k; \beta) + \epsilon(a|k; \omega, \lambda),$$

$$u^{\text{RCNL-LS}}(a|k; \beta, \omega, \lambda) = v^{\text{RCNL-LS}}(a|k; \beta) + \epsilon(a|k; \omega, \lambda),$$

RCNLモデルの最尤法は以下の制約付き最適化問題となる

$$\begin{aligned} \max_{\beta, \omega, \lambda} & LL^{\text{RCNL}}(\beta, \omega, \lambda) \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

推定結果及び交差検証結果

Table 2

Likelihood ratio test results.

Models	χ^2	p -value
NRL & NRL-LS	471.8	1.30e-104
NRL & RCNL	604.8	9.18e-131
NRL-LS & RCNL-LS	553.2	1.41e-119
RCNL & RCNL-LS	420.2	2.21e-93

Table 1

Estimation results.

Parameters	NRL	NRL-LS	RCNL	RCN-LS
$\hat{\beta}_{TT}$	-1.854	-2.139	-1.378	-1.567
Rob. Std. Err.	0.132	0.145	0.080	0.077
Rob. t -test(0)	-14.05	-14.75	-17.296	-20.336
$\hat{\beta}_{LT}$	-0.679	-0.748	-0.517	-0.568
Rob. Std. Err.	0.043	0.047	0.018	0.019
Rob. t -test(0)	-15.79	-15.91	-29.528	-30.105
$\hat{\beta}_{IC}$	-0.258	-0.224	-0.065	-0.072
Rob. Std. Err.	0.016	0.015	0.013	0.011
Rob. t -test(0)	-16.13	-14.93	-4.865	-6.484
$\hat{\beta}_{UT}$	-3.340	-3.301	-2.907	-2.964
Rob. Std. Err.	0.200	0.207	0.094	0.099
Rob. t -test(0)	-16.7	-15.95	-30.963	-30.057
$\hat{\beta}_{LS}$	-	-0.155	-	-0.115
Rob. Std. Err.	-	0.013	-	0.007
Rob. t -test(0)	-	-11.92	-	-16.140
$\hat{\omega}_{TT}$	-0.515	-0.341	-0.637	-0.443
Rob. Std. Err.	0.255	0.288	0.220	0.216
Rob. t -test(0)	-2.02	-1.18	-2.898	-2.053
$\hat{\omega}_{LS}$	0.674	0.581	0.192	0.157
Rob. Std. Err.	0.093	0.09	0.031	0.025
Rob. t -test(0)	7.25	6.46	6.224	6.275
$\hat{\omega}_{OL}$	0.086	0.092	0.027	0.021
Rob. Std. Err.	0.015	0.016	0.003	0.002
Rob. t -test(0)	5.73	5.75	9.846	9.167
$\hat{\lambda}_{TT}$	-	-	2.63E-04	1.84E-08
Rob. Std. Err.	-	-	-	-
Rob. t -test(0)	-	-	-	-
$\hat{\lambda}_{LS}$	-	-	2.85E-05	1.74E-07
Rob. Std. Err.	-	-	-	-
Rob. t -test(0)	-	-	-	-
$\hat{\lambda}_{OL}$	-	-	0.475	0.483
Rob. Std. Err.	-	-	0.012	0.012
Rob. t -test(0)	-	-	41.151	41.230
$LL(\hat{\beta})$	-6187.9	-5952	-5885.5	-5675.4

推定結果及び交差検証結果

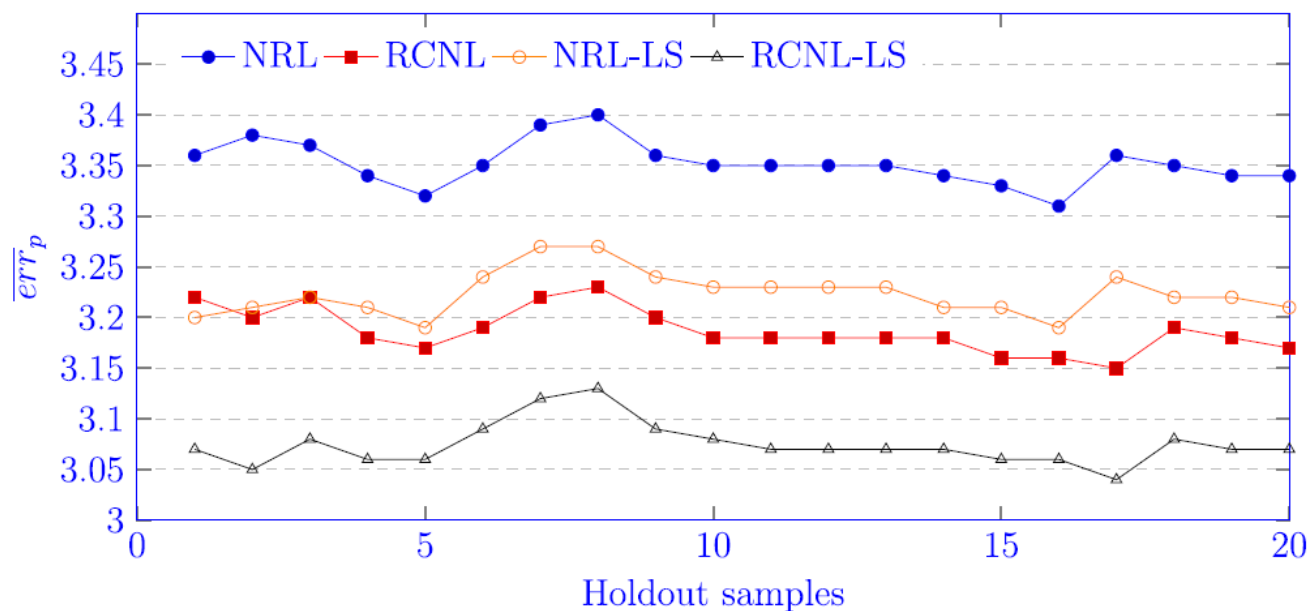


Fig. 5. Average of the test error values over holdout samples.

Table 3

Average of test error values over 20 holdout samples.

NRL	NRL-LS	RCNL	RCNL-LS
3.34	3.21	3.17	3.07

まとめ

- GRLモデルについてRNMEVモデルへの拡張を行い、各ステップの選択にてMEVモデル群のものを適用できるようにした。
- 相関構造を実ネットワークに組み込む手法を示し、RNMEVのBellman方程式の収縮写像を単純化した。
- NRLモデルの手法を用いてRNMEVモデルの推定が行えることを示し、実データに対して早く推定が行えることを示した。
- RLやNRLを含む一般化相関構造を持つRCNLモデルを提案した。
- 提案手法を用いて早く推定ができ、かつNRLやNRL-LSよりも当てはまりの良い結果が得られることを示した。
- 相関構造組み込みの手法はNFP法と合わせてMEV誤差項を含む動的離散選択モデルの推定に適用でき、経路選択以外のモデルへの拡張もでき得る。

参考文献

- Mogen Fosgerau, Emma Frejinger, Anders Karlstrom, A link based network route choice model with unrestricted choice set, Transportation Research Part B, vol. 56, pp. 70-80, 2013.