夏学期ゼミ#9

多段階最適化・EMアルゴリズム

M1 前田歩美

目次

1. 多段階最適化

- **多段階最適化とは**

①下位問題: 現象のモデル化 → **②上位問題: 政策評価**

例)

・**駅前が賑わうように歩行者空間を整備したい**
→①歩行者行動をモデル化
②駅前の歩道拡幅時の流動をシミュレーション→シナリオ評価

・**最適な住宅再建支援政策が知りたい**
→①被災者の居住形態選択をモデル化
②政策変数(補助金額など)を設定してシミュレーション→シナリオ評価

ロジットモデルで
効用関数を設定・パラメータ推定

$$\boldsymbol{\theta} = \operatorname{argmax} LL$$
$$= \operatorname{argmax} \sum_n \sum_i y_{in} \log P_n(i|\boldsymbol{\theta})$$
(最尤法)

→

目的関数を最小化/最大化して
政策変数を最適化

$$\min Z \;/\; \max Z$$

Z例) 予算内で流出人口を最小化

$\boldsymbol{\theta}$：パラメータベクトル
LL：年齢jのデータ数
y_{in}：指示変数 (選択nにおいて選択肢iが選ばれたとき1, それ以外で0)

▪ EMアルゴリズムとは

expectation–maximization algorithm
観測不能な変数や欠損値(潜在変数)を，データから推定する手法の一つ.

① **E-step**：潜在変数の期待値を計算して補完
潜在変数aの推定値 $\hat{a}$ = (期待値の計算)

② **M-step**：尤度最大化により暫定パラメータを更新
パラメータ$\theta = \mathrm{argmax}\ LL$

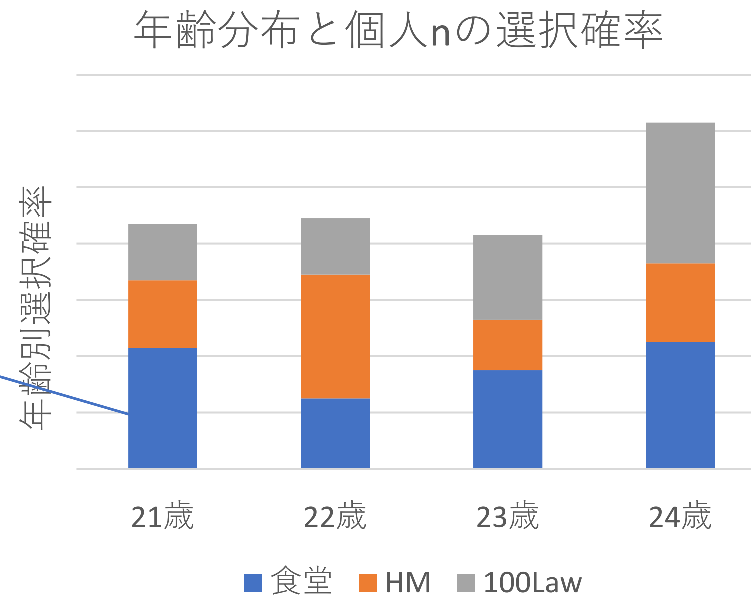
収束するまで反復
($\left|LL^{new} - LL^{old}\right| < \varepsilon$)

(1) 欠損値の補完

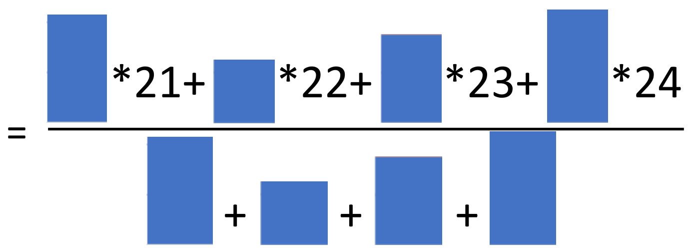
例) 昼ご飯に何を食べたかを21~24歳にアンケート調査
[食堂， HM， 100Law]

選択結果が食堂だった個人nの, 年齢データが欠損のとき

個人nが21歳だった場合の[食堂]の選択確率



E(個人nの年齢)



= Σj (年齢jが占める割合) * (個人nが年齢jのときの[食堂]の選択確率) * (jの代表値) / Σj (年齢jが占める割合) * (個人nが年齢jのときの[食堂]の選択確率)

$$= \frac{\sum_j (N_j/N) * P_n(Cafe|\theta,j) * Age_j}{\sum_j (N_j/N) * P_n(Cafe|\theta,j)}$$

N_j：年齢 jのデータ数
N：データ数合計
$P_n(Cafe)$：個人nに対する[食堂]の選択確率
θ：暫定パラメータ
Age_j：年齢 j (の代表値)

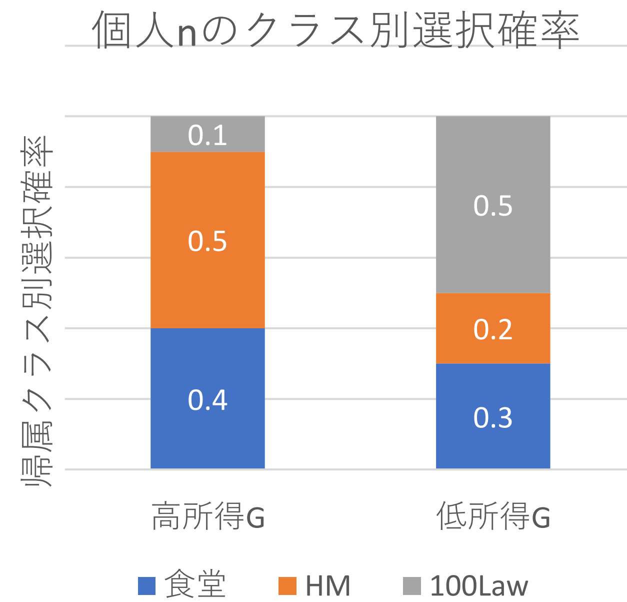
2. EMアルゴリズム

(2) 潜在クラス帰属確率の推定

サンプルが**似た性質を持つ複数のグループ**に分類できると考えられるとき，各サンプルはいずれかの潜在クラスに確率的に帰属すると仮定

例) 高所得グループと低所得グループ，学部 etc.

各クラスは異なる効用関数(異なるパラメータ)で評価される

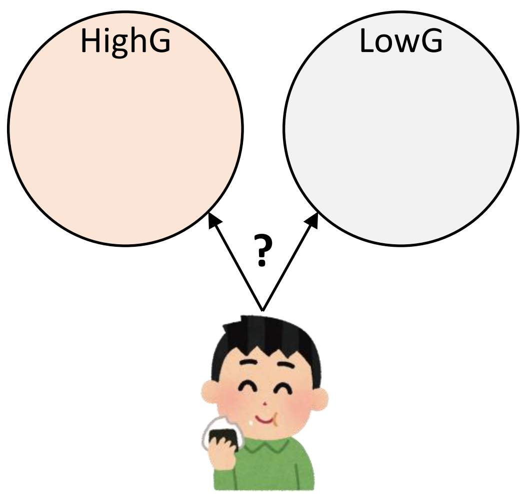


個人nの高所得クラス帰属確率

$$= \frac{\boxed{H}}{\boxed{H} + \boxed{L}}$$

$$= \frac{(\text{個人nが高所得クラスのときの[食堂]の選択確率})}{\Sigma\ j \in \{high, low\}\ (\text{個人nがクラスj のときの[食堂]の選択確率})}$$

$$= \frac{P_n(Cafe|\theta, c_{high})}{P_n(Cafe|\theta, c_{high}) + P_n(Cafe|\theta, c_{low})}$$



- **EMアルゴリズムを使うメリット**

(1)欠損値の補完　：サンプリングバイアスの修正

(2)潜在クラス分け：異なる選好グループの考慮 → モデルの精度向上

・練習問題

年齢無回答，性別男，昼食が食堂だった個人iの年齢の期待値は？

効用関数

$$V_{Cafe} = -0.2 * x_{age} - 4.5 * x_{sex} + 14.0$$
$$V_{HM} = +0.4 * x_{age} + 3.0 * x_{sex} - 5.6$$
$$V_{100Law} = +0.2 * x_{age} + 2.0 * x_{sex}$$

データ

	年齢	性別	昼食		年齢	性別	昼食
1	21	男	食堂	11	22	男	食堂
2	21	男	HM	12	22	男	100Law
3	21	女	食堂	13	23	男	100Law
4	21	男	100Law	14	23	男	食堂
5	22	男	HM	15	23	男	HM
6	22	男	食堂	16	24	女	100Law
7	22	女	HM	17	24	男	HM
8	22	男	HM	18	24	男	食堂
9	22	女	100Law	19	24	男	食堂
10	22	男	100Law	20	24	女	HM

・練習問題 ヒント

年齢無回答，性別男，昼食が食堂だった個人iの年齢の期待値は？

効用関数

$$V_{Cafe} = -0.2 * x_{age} - 4.5 * x_{sex} + 14.0$$
$$V_{HM} = +0.4 * x_{age} + 3.0 * x_{sex} - 5.6$$
$$V_{100Law} = +0.2 * x_{age} + 2.0 * x_{sex}$$

ヒント

$$\exp(4.7) \fallingdotseq 110, \exp(4.9) \fallingdotseq 134, \exp(5.1) \fallingdotseq 164, \exp(5.3) \fallingdotseq 200, \exp(5.8) \fallingdotseq 330,$$

$$\exp(6.2) \fallingdotseq 493, \exp(6.4) \fallingdotseq 602, \exp(6.6) \fallingdotseq 735, \exp(6.8) \fallingdotseq 898, \exp(7.0) \fallingdotseq 1097$$

・練習問題 解答

年齢無回答，性別男，昼食が食堂だった個人iの年齢の期待値は？

効用関数

$$V_{Cafe} = -0.2 * x_{age} - 4.5 * x_{sex} + 14.0$$
$$V_{HM} = +0.4 * x_{age} + 3.0 * x_{sex} - 5.6$$
$$V_{100Law} = +0.2 * x_{age} + 2.0 * x_{sex}$$

解答

分子 = $\frac{4}{20} * \frac{\exp(5.3)}{\exp(5.3)+\exp(5.8)+\exp(6.2)} * 21 + \frac{8}{20} * \frac{\exp(5.1)}{\exp(5.1)+\exp(6.2)+\exp(6.4)} * 22$
$+ \frac{3}{20} * \frac{\exp(4.9)}{\exp(4.9)+\exp(6.6)+\exp(6.6)} * 23 + \frac{5}{20} * \frac{\exp(4.7)}{\exp(4.7)+\exp(7.0)+\exp(6.8)} * 24$
$≒ \frac{4}{20} * 0.1955 * 21 + \frac{8}{20} * 0.1303 * 22 + \frac{3}{20} * 0.08354 * 23 + \frac{5}{20} * 0.05226 * 24$
$≒ 2.570$

分母 = $\frac{4}{20} * 0.1955 + \frac{8}{20} * 0.1303 + \frac{3}{20} * 0.08354 + \frac{5}{20} * 0.05226$
$≒ 0.1168$

∴ E(個人iの年齢) = 2.570/0.1168 ≒ 22.00

ヒント

$\exp(4.7) ≒ 110, \exp(4.9) ≒ 134, \exp(5.1) ≒ 164, \exp(5.3) ≒ 200, \exp(5.8) ≒ 330,$

$\exp(6.2) ≒ 493, \exp(6.4) ≒ 602, \exp(6.6) ≒ 735, \exp(6.8) ≒ 898, \exp(7.0) ≒ 1097$

(2) 潜在クラス帰属確率の推定

例) 昼ご飯の選択をMNLで記述する場合

クラス分けなし

効用関数 $V_{in} = \theta_{age} x_{age,n} + \theta_{sex} x_{sex,n} + \theta_{const}$ 選択肢 $i = \{Cafe, HM, 100Law\}$

選択確率 $P_n(i) = \dfrac{\exp(V_{in})}{\sum_{i'} \exp(V_{i'n})}$

↓

クラス分けあり c={1,2}

効用関数 $V_{in}^c = \underline{\theta_{age}^c x_{age,n} + \theta_{sex}^c x_{sex,n} + \theta_{const}^c}$ 選択肢 $i = \{Cafe, HM, 100Law\}$

クラス毎に異なるパラメータを定義

選択確率 $P_n(i) = s_n^1 P_n^1(i) + s_n^2 P_n^2(i)$

$$= \underline{s_n^1 \frac{\exp(V_{in}^1)}{\sum_{i'} \exp(V_{i'n}^1)} + s_n^2 \frac{\exp(V_{in}^2)}{\sum_{i'} \exp(V_{i'n}^2)}}$$

クラス別選択確率の加重平均

但し，$s_n^1 + s_n^2 = 1$

θ：パラメータ
x：観測した変数
s_n^c：個人nのクラスcへの帰属確率

2. EMアルゴリズム 計算の流れ

(2) 潜在クラス帰属確率の推定

例) 昼ご飯の選択をMNLで記述する場合

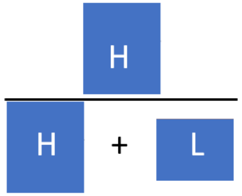
⓪初期設定

パラメータ$\boldsymbol{\theta}$，帰属確率s_n^c の初期値を設定

①E-step 帰属確率s_n^cの推定

暫定パラメータから選択確率を計算 $P_n^c(i|\boldsymbol{\theta}^c)$

→ s_n^cを更新 $s_n^1 = \dfrac{P_n^1(I|\boldsymbol{\theta}^1)}{P_n^1(I|\boldsymbol{\theta}^1) + P_n^2(I|\boldsymbol{\theta}^2)}$ 但し，Iは個人nが選択した選択肢



②M-step パラメータの更新

最尤法より $\boldsymbol{\theta} = \operatorname{argmax} \sum_n \sum_i y_{in} \log P_n(i|\boldsymbol{\theta})$

$= \operatorname{argmax} \sum_n \sum_i y_{in} \log\{s_n^1 P_n^1(i|\boldsymbol{\theta}^1) + s_n^2 P_n^2(i|\boldsymbol{\theta}^2)\}$

対数尤度を更新 $LL^{new} = \sum_n \sum_i y_{in} \log P_n(i|\boldsymbol{\theta})$

収束判定

$|LL^{new} - LL^{old}| < \varepsilon$

収束→推定終了，未収束→①へ

- **NPL法とは**

— nested pseudo-likelihood algorithm

動的離散選択モデルにおいて，構造パラメータを推定する手法の一つ．疑似尤度関数PMLを用いることで，推定において動的計画(DP)問題の繰り返しの求解を回避し，計算負荷を減らしている．

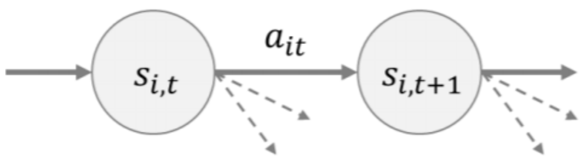
参考: Aguirregabiria, V., & Mira, P. (2010). Dynamic discrete choice structural models: A survey. Journal of Econometrics, 156(1), 38-67.

▪ 動的離散選択モデル

個人i は状態遷移に伴う**効用の割引総和の期待値**

$$E\left(\sum_{j=0}^{T-t} \beta^j \underbrace{U\left(a_{i,t+j}, s_{i,t+j}\right)}_{\text{t+j 期の効用}} \mid a_{it}, s_{it}\right)$$

を最大化するように行動列を選択する.



$t \in [0, T]$: 期間
i : 個人（agent）
s_{it} : t期におけるiの状態
a_{it} : t期におけるiの行動
$\beta \in (0, 1)$: 割引率

これは動的計画(DP)問題と捉えることができ，価値関数 $V(s_{it})$ を用いて，以下のBellman方程式によって再帰的に表現できる．(∵ Bellmanの最適性原理)

$$V(s_{it}) = \max_{a \in A}\left\{\underbrace{U(a, s_{it}) + \beta \int V\left(s_{i,t+1}\right) \mathrm{d}F\left(s_{i,t+1} | a, s_{it}\right)}_{v(a, s_{it})\text{：行動aに対する選択価値関数}}\right\}$$

$F\left(s_{i,t+1} | a, s_{it}\right)$ ：
推移確率＝個人i の信念

3. NPL

▪ 構造推定

選好に関する構造パラメータ θ

繊維確率 F

割引率 β

観測データからパラメータ推定

a_{it}: t期のiの行動
x_{it}: 状態s_{it}のうち観測可能な部分
y_{it}: s_{it}とa_{it}の両者に依存する**利得変数**

$s_{it} = (x_{it}, \varepsilon_{it})$
ε_{it}: 観測不能な部分

例えば，最尤法により推定する場合，対数尤度関数は

$$g_N(\theta) = \textstyle\sum_{i=1}^{N} l_i(\theta),$$ ※agent N人

$$l_i(\theta) = \log \Pr\{a_{it}, x_{it}, y_{it} : t = 1, \ldots, T_i \mid \theta\}$$
$$= \log \Pr\{\alpha(x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta) = a_{it}, x_{it}, y_{it} : t = 1, \ldots, T_i \mid \theta\}$$

$g_N(\theta)$: 推定基準
$\alpha(x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta)$: **最適行動ルール**
$\alpha(s_{it}) = \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\{v(a, s_{it})\}$

推定基準の評価 (θの推定) のために，$\alpha(x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta)$ の情報が必要

→ $v(a, s_{it})$ の情報が必要

→ **θの探索に際して，その都度DP問題を解く，または近似解を求める必要がある**

3. NPL

- **dynamic programming(DP)-conditional logitモデル(Rsut,1987) の仮定**

「推定のための最も簡単な枠組み」

■仮定 AS (Additive Separability)：**加法分離性**

効用関数Uは以下のように分離できる.

$$U(a, x_{it}, \varepsilon_{it}) = u(a, x_{it}) + \underline{\varepsilon_{it}(a)}$$

$a \in A$ に対応して生じる，平均0のランダム項

$\begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ \vdots \\ a^J \end{bmatrix}$ (J+1)×1次元ベクトル

■仮定 IID (iid Unobservables)：**独立同分布**

ε_{it}は互いに独立で同一の確率分布$G_\varepsilon(\varepsilon_{it})$ に従う.

■仮定 CI-X (Conditional Independence of Future x)：**状態の条件付き独立性**

t+1期の状態$x_{i,t+1}$は t期の状態$x_{i,t}$に依存する一方，ε_{it}には依存しない.

$$CDF\left(x_{i,t+1} | a, x_{it}, \varepsilon_{it}\right) = F_x\left(x_{i,t+1} | a_{it}, x_{it}\right)$$

累積分布関数

■仮定 CI-Y (Conditional Independence of y)：**利得変数の条件付き独立性**

利得変数yは状態xと行動aに依存する一方，εとは独立である.

$$y_{it} = Y(a_{it}, x_{it})$$

■仮定 CLOGIT (Conditional Logit Model)：**条件付きロジット型モデル**

観測不可能な状態$\{\varepsilon_{it}(a): a = 0,1,\ldots,J\}$は互いに独立であり，それぞれタイプ1極値分布 (ガンベル分布) に従う.

■仮定 DIS (Discrete Support of x)：**離散型の状態**

状態x_{it}のとる範囲は離散かつ有限である.

特に，仮定CI-X, IIDより以下が成り立つ.

$$F\left(x_{i,t+1}, \varepsilon_{i,t+1} | a, x_{it}, \varepsilon_{it}\right) = G_\varepsilon(\varepsilon_{it}) F_x\left(x_{i,t+1} | a_{it}, x_{it}\right) \ \ldots (*)$$

εのみに依存する
ガンベル型確率分布

εに依存しない
確率分布

以上の仮定の下で，構造パラメータ $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_u, \theta_Y, \theta_f\right)$ **の推定が可能になる**

→構造推定法(NFXP法, NPL法, …)

θ_u: 効用関数のパラメータ
θ_Y: 利得関数のパラメータ
θ_f: 推移確率関数のパラメータ

3. NPL

▪ Bellman方程式の書き換え

積分価値関数(Emax関数) $\bar{V}(x_{it})$ を導入

　$=\varepsilon_{it}$の確率分布に対する価値関数Vの期待値： $\bar{V}(x_{it}) = \int V(x_{it}, \varepsilon_{it})\mathrm{d}G(\varepsilon_{it})$

→ $(*)$の下，DP問題が$\bar{V}$の再帰式で書き換えられる

積分価値関数

$$\bar{V}(x_{it}) = \int V(x_{it}, \varepsilon_{it})\mathrm{d}G(\varepsilon_{it})$$

$$= \int \max_{a\in A}\Big\{\overbrace{U(a, s_{it}) + \beta \int V\big(s_{i,t+1}\big)\mathrm{d}F\big(s_{i,t+1}|a, s_{it}\big)}^{\text{選択価値関数 } v(a, s_{it})}\Big\}\ \mathrm{d}G(\varepsilon_{it})$$

$$= \int \max_{a\in A}\Big\{u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) + \beta \textstyle\sum_{x_{i,t+1}} \underbrace{f_x\big(x_{i,t+1}|a, x_{it}\big)}_{f_x\text{: 推移確率の密度関数}} \underbrace{\int V\big(x_{i,t+1}, \varepsilon_{i,t+1}\big)\mathrm{d}G(\varepsilon_{it})}_{\bar{V}(x_{i,t+1})}\Big\}\ \mathrm{d}G(\varepsilon_{it})$$

$$\therefore\quad \bar{V}(x_{it}) = \int \max_{a\in A}\Big\{u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) + \beta \textstyle\sum_{x_{i,t+1}} f_x\big(x_{i,t+1}|a, x_{it}\big)\bar{V}\big(x_{i,t+1}\big)\Big\}\ \mathrm{d}G(\varepsilon_{it})$$

$\bar{V}(x_{it})$はこのBellman方程式の一意解．「DP問題を解く」＝「$\bar{V}(x_{it})$ を求める」

▪ 条件付き選択確率

価値関数のBellman方程式★を，条件付き選択確率$P(a|x,\theta)$の方程式にして解きたい．

→ $P(a|x,\theta)$が求めるべき解の候補

→ P から P へ移すような写像 (＝CCPオペレータ) をBellman方程式から求め，その不動点を解とする．

CCP：

$$P(a|x,\theta) = \int I\{\alpha(x,\varepsilon\,;\theta) = a\}\,\mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon)$$

$$= \int I\{v(a,x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) > v(a',x_{it}) + \varepsilon_{it}(a') \ \ for\ all\ a'\}\mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon)$$

$$\boxed{\therefore\ P(a|x,\theta) = \int I\left(a = \operatorname*{argmax}_{a'\in A}\left\{u(a',x_{it}) + \varepsilon_{it}(a') + \beta \sum_{x_{i,t+1}} f_x\left(x_{i,t+1}|a,x_{it}\right)\bar{V}\left(x_{i,t+1}\right)\right\}\right)\mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon)}$$

P が $\bar{V}$ の写像になっている．
写像$\boldsymbol{\Lambda}(\cdot)$: $\bar{\boldsymbol{V}} \to \boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{P} = P(a|x)\colon x = x^1,\dots,x^M, a^1,\dots,a^J$
を要素とする(M×J)行列
$\bar{\boldsymbol{V}} = \left(\bar{V}(x^1),\dots,\bar{V}(x^M)\right)$ ベクトル

▪ 期待価値関数への写像

期待価値関数$\bar{V}(x_{it})$のBellman方程式★を条件付き選択確率を用いて表すと,

$$\bar{V}(x) = \sum_{a\in A} P(a|x)\left\{u(a,x) + E[\varepsilon_{it}(a)|x_{it}, \alpha(x,\varepsilon)=a] + \beta \sum_{x_{i,t+1}} f_x\left(x_{i,t+1}|a, x_{it}\right)\bar{V}\left(x_{i,t+1}\right)\right\}$$

→ベクトル表現 ($\bar{V}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^M \end{pmatrix} =$) $\boldsymbol{\bar{V}} = \sum_{a\in A} \boldsymbol{P}(a) * \{\boldsymbol{u}(a) + \boldsymbol{E}(a) + \beta \boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{\bar{V}}\}$

$$\boldsymbol{F}(a) = \begin{bmatrix} f_x(x^1|x^1,a) & \dots & f_x(x^M|x^1,a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_x(x^1|x^M,a) & \dots & f_x(x^M|x^M,a) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}(a) = \left(P(a|x^1), \dots P(a|x^M)\right)'$$

$$\boldsymbol{u}(a) = \left(u(x^1,a), \dots, u(x^M,a)\right)'$$

$$\boldsymbol{E}(a) = (E[\varepsilon_{it}(a)|x^1, \alpha(x^1,\varepsilon)=a], \dots, E[\varepsilon_{it}(a)|x^M, \alpha(x^M,\varepsilon)=a])$$

これを変形して,

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{V}} = \left[I_M - \beta \sum_{a\in A} \boldsymbol{P}(a) * \boldsymbol{F}(a)\right]^{-1} \sum_{a\in A} \boldsymbol{P}(a) * \{\boldsymbol{u}(a) + \boldsymbol{E}(a)\}}$$

$\bar{V}$がPの写像になっている.

写像$\boldsymbol{\Phi}(\cdot): \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\bar{V}}$

∴ CCPオペレータは2つの写像の合成で, $\boldsymbol{\Psi}(\cdot) = \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\right)$

→不動点 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{P})$ が求める解の候補.

3. NPL

▪ Rustモデルに対する推定法

パラメータθの更新ごとにDP問題を解く

1. NFXP 法 (Rust(1987))

DP問題の繰り返しの求解を回避→高速化

2. CCP法(Hotz & Miller(1993))
3. NPL法(Aguirregabiria & Mira(2002))
4. simulation-based CCP法(Hotz et al.(1994))

1. NFXP: nested fixed point algorithm (Rust(1987))

構造パラメータを推定する**外部ループ**(BHHH法)と，暫定の構造パラメータのもとでDP問題を解く**内部ループ**(政策反復法or価値反復法)を組み合わせたもの.

手順

⓪ 構造パラメータの初期値 $\hat{\theta}_0$ を任意の値に設定.

①内部ループ：**価値反復法**により，価値関数$\bar{V}$を求める (Bellman方程式の不動点)

$$\bar{V} = \log\left(\sum_{a=0}^{J} \exp\{u(a,\theta) + \beta F_x(a)\bar{V}\}\right)$$

$$\bar{V}(\hat{\theta}_k) \rightarrow P(a|\, x, \hat{\theta}_k) \rightarrow \frac{\partial \bar{V}(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta'} \rightarrow \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta}$$ の順に求まる

②外部ループ：BHHH法によりパラメータを更新.

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta'}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta}\right)$$

$l_i(\hat{\theta}_k)$: 個人i の対数尤度関数

①②を収束するまで反復

「***P***の更新回数(内部ループ)× ***θ***の更新回数(外部ループ)」の計算が必要 (入れ子の形)

2. CCP法 (Hotz & Miller(1993))

DP問題を繰り返し解くため計算負荷の高いNFXP法に対して,
DPを解かずに構造パラメータを推定する手法を提案.（2ステップアルゴリズム)

選択価値関数を以下で表す.

$$v(a, x_t, \theta) = \tilde{z}(a, x_t, \theta)\theta_u + \tilde{e}(a, x_t, \theta)$$ **… Hotz & Millerの表現**

3. NPL

手順

⓪ 観察されたデータを用いて各状態x に対する選択された行動a の**相対度数**を求め，これを条件付き確率 $P\left(a^j|x\right)$ の推定値とする．

① $P\left(a^j|x\right)$ の推定値から，<u>Qの逆写像</u>により価値関数 $v\left(x,a^j\right)$ を求める．

価値関数の差 $\tilde{v}(x_t)=\{v(a|x_t)-v(0|x_t)\}$を考えることで， $\tilde{v}(x_t)$から$P(a|x_t)$ への写像Qを定義でき，

任意のx に対してQは逆写像を持つ（Hotz & Miller(1993)）

② 価値関数の推定値より，<u>構造パラメータを推定</u>する．

θの真値を $\theta^0=\left(\theta_u^0,\theta_f^0\right)$

P^0,θ_f^0 が未知のとき，推移確率のθ_f^0に対する(部分的)最尤法により，DP問題を解かずに推定できる．

$$\max \sum_{i,t} \log f_x\left(x_{i,t+1}|a_{it},x_{it},\theta_f\right)$$

P^0,θ_f^0の推定結果から，$P(a$^$j\ |x)$ の推定値を得る．

※ θ_u はHotz & Miller推定量(GMM推定量)の等式を解くことで得られる．

①②を収束するまで反復※

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} H(x_{it}) \times \begin{bmatrix} I\{a_{it}=1\} - \dfrac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(1,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(1,x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\right\}} \\ \vdots \\ I\{a_{it}=J\} - \dfrac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(J,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(J,x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\right\}} \end{bmatrix} = 0$$

2. CCP法 (Hotz & Miller(1993))

Hotz & Miller の手法の特徴：計算負荷が小さいが，解が漸近性を持つとは限らない.

↓

Aguirregabiria &Mira(2002)：Hotz & Miller推定量の擬似的な尤度最大化が，最尤法と漸近的に等価であることを示した.

疑似尤度関数PML

$$Q(\theta_u, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\theta}_f) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T_i} \log \frac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a_{it}, x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a_{it}, x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J} \exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a, x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a, x_{it})\right\}}$$

→これの最大化によりθ_uを決定

3. NPL: nested pseudo-likelihood algorithm (Aguirregabiria & Mira(2002))

疑似尤度関数を用いることでDP問題の繰り返しの求解を避ける.

※先に構造パラメータのうちθ_fだけ先に求めておき，改めて$\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_u, \hat{\theta}_f\right)$とおく.

手順

⓪ 選択確率の初期値$\boldsymbol{P}^{(0)}$の各要素に適当な[0,1]間の値を割り当てる.

① 疑似尤度関数PMLを用いて次の$\boldsymbol{\theta}$の候補を見つける.

PML: $\boldsymbol{\theta}^{(k)} = \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} \ln \Psi_\theta\left(\boldsymbol{P}^{(k-1)}\right)\left(a_{it} = a^j | x_{it} = x^m\right)$

N:agent数　M:状態の種類　Ψ_θ: 構造パラメータがθの
T:時間数　J:行動の種類　時のCCPオペレータ

② CCPオペレータから次の$\boldsymbol{P}$の候補を見つける.

$$\boldsymbol{P}^{(k)} = \Psi_{\theta^{(k)}}\left(\boldsymbol{P}^{(k-1)}\right)$$

①②を$\boldsymbol{P}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}$が収束するまで反復.

内部ループの更新($\boldsymbol{\theta}$)と**外部ループ**の更新($\boldsymbol{P}$)が同時にできる→計算回数少ない

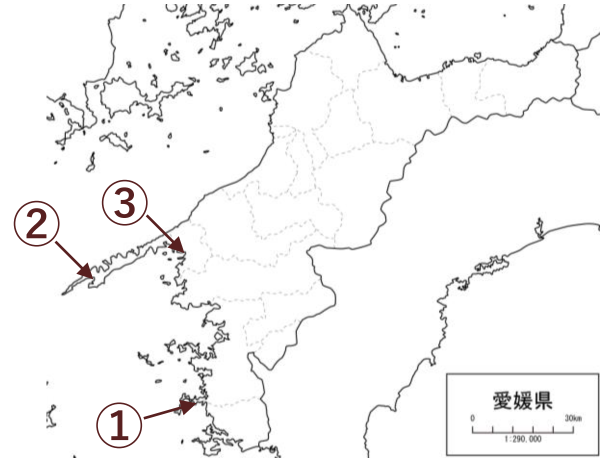
プログラミング課題

4. プログラミング課題

▪ 使用データ

調査	事前復興センサス ・世帯票 ・再建調査票		
期間	2019年8月～10月		
調査方法	アンケート調査		
対象地域	①南宇和郡 愛南町家串	②西宇和郡 伊方町三崎	③八幡浜市
世帯数(2015年現在)	82	454	14995
調査世帯数	46	83	380
データ数 (欠損データ含む)	84	177	729

再建調査票 問10の結果を基に,
世帯の復興期の居住形態選択をモデル化
→最適な補助金配分を考察



問 10: 最終的な住宅の確保について、質問 A、B、C にすべてにお答えください。

質問 A: 以下の 3 つの方法がある場合、どれを希望されますか。
A の回答欄に希望する番号をご記入ください。
1．**町内**の**高台**に土地を見つけ、**500 万円**の補助金で地震から **3 年目**に自宅を再建する
2．防災集団移転事業に **2,000 万円**の補助金で参加し、地震から **5 年目**に自宅を再建する
3．災害公営住宅に地震から **4 年目**に入居する

質問 B: 以下の 3 つの方法がある場合、どれを希望されますか。
B の回答欄に希望する番号をご記入ください。
1．**町外**の**高台**に土地を見つけ、**2,000 万円**の補助金で地震から **5 年目**に自宅を再建する
2．防災集団移転事業に **500 万円**の補助金で参加し、地震から **4 年目**に自宅を再建する
3．災害公営住宅に地震から **3 年目**に入居する

質問 C: 以下の 3 つの方法がある場合、どれを希望されますか。
C の回答欄に希望する番号をご記入ください。
1．**町内**の**被災していない低平地**に土地を見つけ、**500 万円**の補助金で地震から **4 年目**に自宅を再建する
2．防災集団移転事業に **2,000 万円**の補助金で参加し、地震から **3 年目**に自宅を再建する
3．災害公営住宅に地震から **5 年目**に入居する

選択肢
1：自力で自宅再建(市内or市外)
2：防災集団移転
3：災害公営住宅

4. プログラミング課題

1. クラス分けなしモデルの推定

事前復興センサスデータ (再建意向調査.csv) を用いて，居住形態選択をロジットモデルで記述し，パラメータ推定 → 結果の表を作成

変数設定：「補助金」を必ず入れる，他は自由

選択肢　：[市外再建，市内再建，防災集団移転，災害公営住宅]

または [自力再建，防災集団移転，災害公営住宅]

(参考：MNLをRで http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/kaken/pdf/mnl.pdf)

2. クラス分けありモデルの推定

① 1. のモデルをクラス分けありver.に変更して，パラメータ推定→ 結果の表を作成

尤度比が大きく上昇すること，t値が平均的に下がることを確認

② 変数を変えて(or有効でない変数を除いて)推定してみる．モデル間でパラメータ値，尤度比，帰属確率等を比較 → 最も現実に近そうなモデルを採用

気付き(どの変数が有効か，どうクラス分けされているか等)があったら考察

3. 目的関数の最大化

住宅再建政策を実施するにあたって達成したい目的を設定

流出世帯数の最小化，住民の期待効用最大化 等

→目的関数を定式化

→2. で採用したモデルに基づいて，目的関数を最小化/最大化する補助金配分を計算する

→目的がどれくらい達成されたか等，考察

4. プログラミング課題

再建意向調査.csv　←世帯票・再建調査票

列番号	列名	説明
1	世帯ID	
2	調査地域_家串	家串の世帯=1
3	調査地域_三崎	三崎の世帯=1
4	世帯主性別	
5	世帯主年齢	
6	世帯人数	
7	職業_第一次産業従事	世帯の誰かが第一次産業従事者=1
8	職業_無職・退職済	世帯全員が無職=1
9	職業不明	職業欄記載なし=1
10	車の保有台数	
11	住宅形態_持家	※現住居
12	住宅形態_借家	※現住居
13	住居形態_一戸・長屋建て	※現住居
14	住居形態_アパート・マンション	※現住居
15	住宅形態_公営住宅	※現住居
16	住宅形態_給与住宅	※現住居
17	敷地面積(坪)	※現住居
18	問1_地震保険	未加入=0
19	問2_年間所得	
20	問3-1_第一次産業	

列番号	列名	説明
21	(備考)	
22	問3-2_第一次産業以外	
23	(備考)	
24	調査区分	
25	問4_復旧期の暮らし	
26	(備考)	
27	問5_仮住まいへの入居(〇週間以内)	
28	問6_復興後の同居(親族)	
29	問7_最終的な住宅形態	
30	(備考)	
31	問7_敷地面積	
32	問7_部屋数	
33	問8_何年以内の入居が望ましいか	
34	問9_全部で(万円)	
35	問9_自己資金	
36	問9_補助金	
37	問10_A	
38	問10_B	
39	問10_C	
40	その他コメント	

列番号	列名	説明
41	整理番号	問10-Aのデータとして使用:1,B:2,C:3
42	問10結果	
43	市内で再建_available	問10 1.「市内(町内)」=1
44	市内で再建_高台	問10 1.「高台」=1
45	市内で再建_補助金(1000万)	問10 1.「〇万円の補助金で」
46	市内で再建_地震後(年目)	問10 1.「地震から〇年目に」
47	市外で再建_available	問10 1.「市外(町外)」=1
48	市外で再建_高台	問10 1.「高台」=1
49	市外で再建_補助金(1000万)	問10 1.「〇万円の補助金で」
50	市外で再建_地震後(年目)	問10 1.「地震から〇年目に」
51	防災集団移転_available	1
52	防災集団移転_補助金(1000万)	問10 2.「〇万円の補助金で」
53	防災集団移転_地震後(年目)	問10 2.「地震から〇年目に」
54	災害公営住宅_available	1
55	災害公営住宅_地震後(年目)	問10 3.「地震から〇年目に」
56	住所	現住所
57	fX	現住所の経度
58	fY	現住所の緯度
59	海岸距離(m)	現住居から海岸までの直線距離

1. 多段階最適化

変数の設定例

	補助金額	復興期間	所得	定数項
Vout =	m1*Data$市外再建_補助金.1000万.	+p1*Data$市外再建_地震後.年目.	+i11*Data$問2_年間所得	+b11)
Vin =	m1*Data$市内再建_補助金.1000万.	+p1*Data$市内再建_地震後.年目.	+i12*Data$問2_年間所得	+b12)
Vgrp =	m1*Data$防集_補助金.1000万.	+p1*Data$防集_地震後.年目.	+i13*Data$問2_年間所得	+b13)
Vpub=		p1*Data$公営_地震後.年目.	+ 1 *Data$問2_年間所得)	

Rの出力

```
> ##結果の出力
> print(L0) #初期尤度
[1] -1087.626
> print(bestLL) #最終尤度
[1] -376.1335
> print((L0-bestLL)/L0) #尤度比
[1] 0.6541702
> print((L0-(bestLL-length(b)))/L0) #修正済み尤度比
[1] 0.6394593
> print(best) #パラメータ推定値
 [1]  -7.4127968   2.0299556   1.3304063   0.2813031
 [5]   5.8693958  -2.0762743  -4.9516641 -31.6682633
 [9]   0.9840914  -0.4381832   2.9188309   2.6135078
[13]   2.6657314   2.7012158   5.2047825   4.1871993
> print(best/sqrt(-diag(solve(hhh)))) #t値
 [1] -0.293803280  1.311918478  6.413903658
 [4]  0.005560072  0.011137181 -0.157553953
 [7] -0.056897505 -0.012032417  7.784105990
[10] -5.665713430  0.453301776  0.405856764
[13]  0.414019047  0.275824867  0.531375553
[16]  0.427708665
> print(ave(bests1)[1]) #クラス1平均帰属確率
[1] 0.4345572
```

→ 表を作成

	クラス1		クラス2	
	パラメータ	t値	パラメータ	t値
平均帰属確率	0.43	-	0.57	-
補助金額	-7.41	-0.29	0.98	7.78*
復興期間	2.03	1.31	-0.44	-5.67*
所得-市外再建	1.33	6.41*	2.92	0.45
所得-市内再建	0.28	0.01	2.61	0.41
所得-防集	5.87	0.01	2.67	0.41
所得-公営	1.00	-	1.00	-
定数項-市外再建	-2.08	-0.16	2.70	0.28
定数項-市内再建	-4.95	-0.06	5.20	0.53
定数項-防集	-31.67	-0.01	4.19	0.43
サンプル数				990
初期尤度				-1087.63
最終尤度				-376.13
尤度比				0.65
修正済み尤度比				0.64
				*: 5%有意

変数の設定例２

$$v_{im}^{j} = a^{j}U_m + b_m^{j}S_m + c_m^{j}T_m + d_m^{j}I_i + e_m^{j}(C_i - C_{med}) + M_m^{j} \tag{5.1}$$

U_m 居住形態 m の高台ダミー（高台の立地=1, 低平地の立地=0. ）

S_m 居住形態 m に対する支援金額（円/1000 万）

T_m 居住形態 m の復興期間（年）

I_i 世帯 i の所得指数（年間所得が 0〜200 万円=1, 200〜400 万円=2, 400〜600 万円=3, 600〜800 万円=4, 800 万円以上=5）

C_i 世帯 i の自宅から海岸までの最短距離（m/100, 住所情報から算出）

C_{med} 全世帯の C_i の中央値（289.03m）

M_m^{j} クラス j における居住形態 m の定数項（公営のみ）

$a^{j}, b_m^{j}, c_m^{j} d_m^{j}, e_m^{j}$ パラメータ

クラス1と2で異なる変数設定

クラス分けしたことで平均的にt値は下がっているものの，尤度比が大きく上昇

	クラス 1		クラス 2		クラス無しモデル	
	パラメータ	t 値	パラメータ	t 値	パラメータ	t 値
平均帰属確率-家串	0.21	-	0.79	-	-	-
平均帰属確率-三崎	0.42	-	0.58	-	-	-
平均帰属確率-八幡浜	0.48	-	0.52	-	-	-
高台ダミー-地域内再建	0.39	0.81	0.46	0.65	0.26	0.83
支援金額-地域外再建	0.31	1.19	-	-	0.22	1.08
支援金額-地域内再建	1.10	1.65	-	-	1.20	2.43*
支援金額-防集	0.99	4.90*	-	-	0.52	4.07*
復興期間-地域外再建	-	-	-0.29	-1.76	-0.13	-1.66
復興期間-地域内再建	-	-	-0.07	-0.37	-0.16	-1.71
復興期間-防集	-	-	-0.15	-0.93	-0.12	-1.87
復興期間-公営	-	-	-3.16*	-3.44*	-0.12	-1.85
所得指数-地域外再建	4.59	5.46*	-	-	1.63	16.50*
所得指数-地域内再建	4.47	5.29*	-	-	1.50	13.87*
所得指数-防集	4.31	5.17*	-	-	1.51	19.05*
所得指数-公営	1.00	-	-	-	1.00	-
海岸距離-地域外再建	12.25	4.15*	-14.86	-3.87*	-0.05	-1.07
海岸距離-地域内再建	12.38	4.20*	-14.33	-3.72*	-0.04	-0.77
海岸距離-防集	12.21	4.14*	-14.74	-3.84*	-0.17	-4.20*
定数項-公営	-8.09	-2.86*	37.75	3.71*	2.33	6.16*
サンプル数				690		690
初期尤度				-755.85		-755.85
最終尤度				-271.61		-682.04
尤度比				0.64		0.10
修正済み尤度比				0.61		0.08

*：5% 有意