Recursive Logitモデル

交通・都市・国土学研究室

月田 光

先週の質問

- 多項ロジット(MNL)モデル

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in A} \exp(\mu V_j)}$$

- スケールパラメータμについて
  - MNLモデルの仮定として全選択肢で同一の誤差項の分布, 同一のμを用いる
  - μを2倍3倍に⟷ V_iが$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍に
    →よってμを1に固定しても，V中のパラメータがそれに合わせて変化するだけ

先週の質問

- ネスティッドロジット(NL)モデル
- バスの効用を、共通のものと独立のものに分ける

$$V_{RedBus} + \varepsilon_{RedBus} = V_{Red} + V_{bus} + \varepsilon_{Red} + \varepsilon_{bus}$$
$$V_{BlueBus} + \varepsilon_{BlueBus} = V_{Blue} + V_{bus} + \varepsilon_{Blue} + \varepsilon_{bus}$$
$$V_{Car} + \varepsilon_{Car}$$

- モデルの仮定として，誤差項の分散が同一

Var($\varepsilon_{Red} + \varepsilon_{bus}$)=Var($\varepsilon_{Blue} + \varepsilon_{bus}$)=Var($\varepsilon_{Car}$)

- ところで分散には次のような性質がある.

Var($\varepsilon_{Red} + \varepsilon_{bus}$)= Var($\varepsilon_{Red}$)＋ Var($\varepsilon_{bus}$)+2Cov($\varepsilon_{Red}, \varepsilon_{bus}$)

- ガンベル分布のスケールパラメータと分散の関係

Var(ε)= $\frac{\pi^2}{6\mu^2}$

$$P(RedBus) = P(RB|bus)P(bus)$$
$$= \frac{\exp(\mu_c V_{Red})}{\exp(\mu_c V_{Red}) + \exp(\mu_c V_{Blue})} \times \frac{\exp\{\mu_m (V_{bus} + V'_{bus})\}}{\exp\{\mu_m (V_{bus} + V'_{bus})\} + \exp(\mu_m V_{car})}$$
$$= \exp(\mu_c V_{RedBus}) \frac{\{\exp(\mu_c V_{RedBus}) + \exp(\mu_c V_{BlueBus})\}^{\frac{\mu_m}{\mu_c} - 1}}{\{\exp(\mu_c V_{RedBus}) + \exp(\mu_c V_{BlueBus})\}^{\frac{\mu_m}{\mu_c}} + (\exp V_{car})^{\mu_m}}$$

$$V'_{bus} = \frac{1}{\mu_c} \ln \sum_{col \in \{R,B\}} \exp(\mu_c V_{col})$$

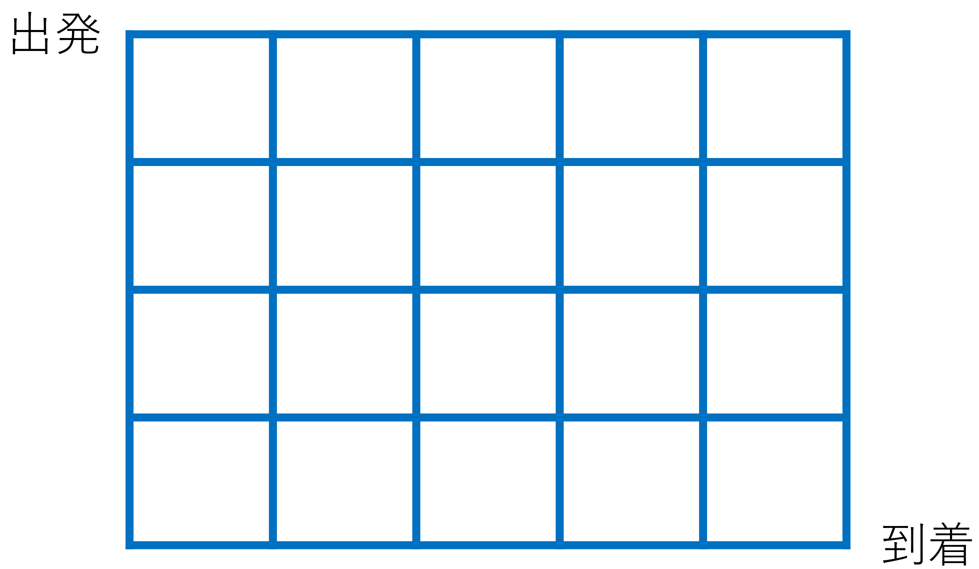
- Var($\varepsilon_{Red} + \varepsilon_{bus}$)= Var($\varepsilon_{Red}$)＋ Var($\varepsilon_{bus}$)> Var($\varepsilon_{Red}$)より

  Var($\varepsilon_{Red} + \varepsilon_{bus}$)> Var($\varepsilon_{Red}$)
  $$\frac{\pi^2}{6\mu_m^2} > \frac{\pi^2}{6\mu_c^2}$$
  よって $\mu_m < \mu_c$

- よって青枠式中の$\frac{\mu_m}{\mu_c}$は0から1の値となる.

はじめに

- 自宅から最寄駅に行くルートを行動モデルで考えましょう
  - MNLモデルでは…
    - ルートの羅列は不可能(組み合わせ爆発)
    - 家を出る前に全てのルートから選んでいるのではなく，歩きながら決めることも多い(モデルが合わない)



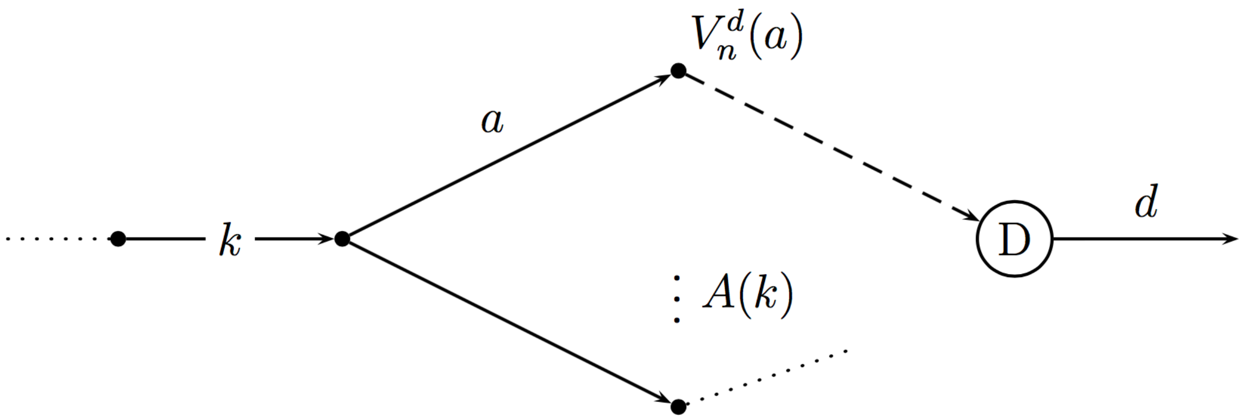
解決法

1. 代表的なルートのみ抽出(IIA特性に注意)
2. 逐次的な行動モデル(Recursive Logitモデル)

- **Recursive logit model (RLモデル)**
  - 各ノードで瞬間効用、誤差項、目的地への期待最大効用を考える
    - 各ノードではMNLモデルで選択を行う
  - 逐次的かつ再帰的な方法でパスが選択される
    - 逐次的
      - 経路選択はリンク選択の組み合わせ
      - 各ノードで効用最大化を目指して次のリンクを経路選択
    - 再帰的
      - 次の状態だけではなく、将来の状態まで考えた効用の式
        →Bellman方程式の利用
  - 選択肢は無限集合であり、ループを含む経路を選択する可能性も持つ
    - 経路の集合に制限をかけることなく、一貫して推定できる
    - 計算効率の高い方法で予想ができる

定式化-ネットワーク設定

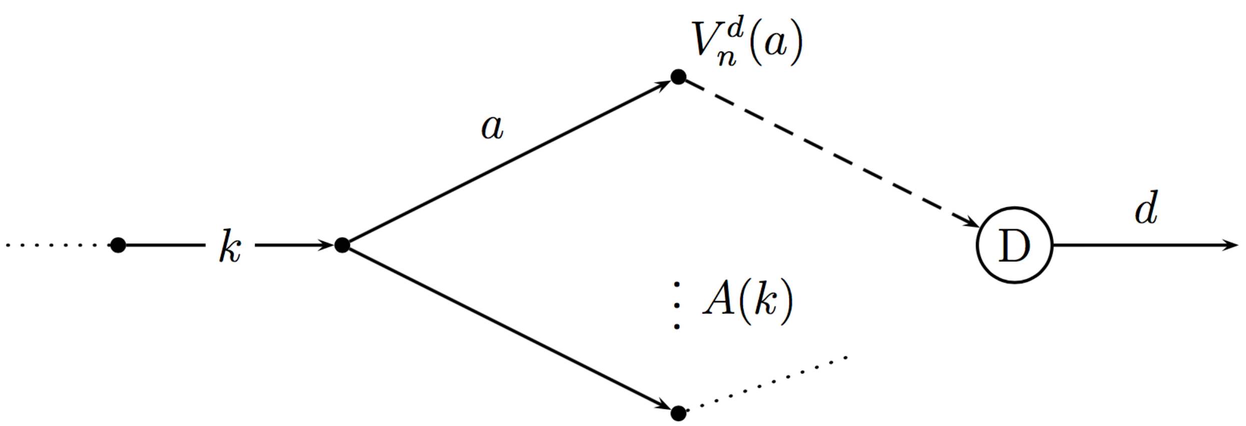
- 有向連結グラフ(ネットワーク)$G = (A, v)$を考える
  - A:リンクの集合　v:ノードの集合
- リンク$k, a \in A$
- リンクkの終点から出るリンクの集合$A(k)$ $\boxed{a \in A(k) \subset A}$



- O→Dのパスは、リンクの列$(k_0, \dots, k_I)$で表される
  - ただし、$\forall i < I, k_{i+1} \in A(k_i)$

定式化-ネットワーク設定

- 効用関数
  - 瞬間効用$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
  - 期待効用$V^d(a)$
- 終点のダミーリンクd
  - 目的地ノードからダミーリンクdを追加し吸収状態を定義
  - 全リンクの集合を$\tilde{A}^d = A \cup d$
  - 目的地ノードを終点とする全てのリンクkに対し、$v(d|k) = 0$
- 旅行者はマルコフ確率過程によって次の状態を選択
  - 各状態kでランダム効用$\varepsilon_n(a), a \in A(k)$を観測
  - 効用は$v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a) + V_n^d(a)$で表される



定式化-効用関数

- 効用関数
  - 瞬間効用$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
    - 旅行者nが状態kにいる条件で選択肢集合A(k)の各選択肢に定義
    - 確定項$v_n(a|k) = v\left(x_{n,a|k}; \beta\right) < 0$
      - リンクペアによって定義。これによりリンク加法でない属性を含むことができ、ターンやノードに関する属性を含むことができる
        - 例：交差点の数、左折か否か
    - 誤差項$\varepsilon_n(a)$
      - 平均値0のガンベル分布と仮定
      - モデル内の他のすべてのものから独立している
      - 係数にスケールパラメータμがつく
  - 期待効用$V^d(a)$
    - 行動aを選択した際の目的地dまでの期待効用

Bellman方程式

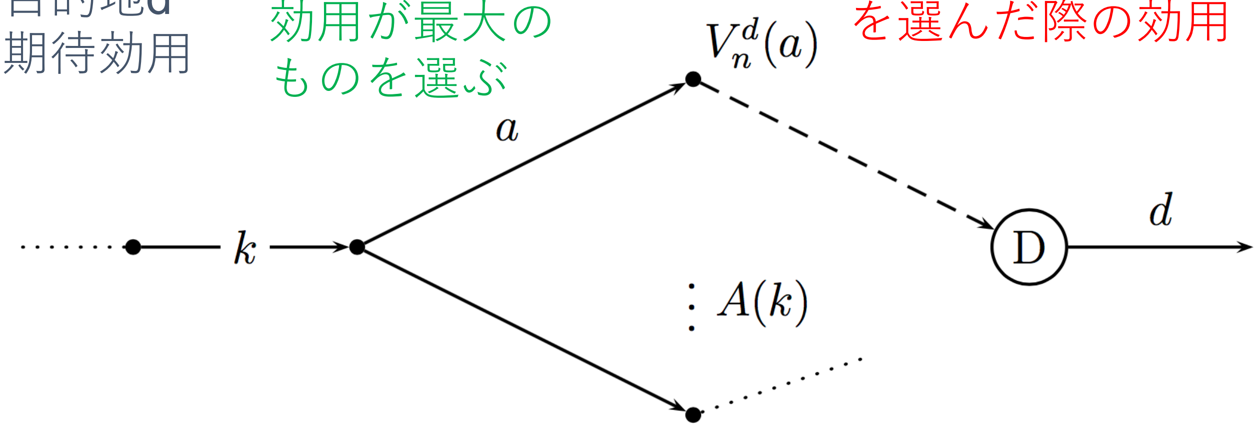
- 効用関数
  - 瞬間効用$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
  - 期待効用$V^d(a)$

- 価値関数$V_n^d(k)$
  - 以下の式で表される。この式を、**Bellman方程式**という。
  - $V_n{}^d(k) = E\left[\max_{a \in A(k)} \left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right)\right] \; \forall k \in A$ (2)

状態kを選んだ際の、目的地dまでの期待効用

$A(k)$の中から効用が最大のものを選ぶ

状態kにおいて、次に状態aを選んだ際の効用



選択確率

- 状態kにおける、次の状態aの選択確率はMNLモデルで表される

$$P_n^d(a|k) = \frac{\exp(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a)\right))}{\sum_{a'\in A(k)} \exp(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + V_n^d(a')\right))} \quad (3)$$

- また、価値関数は次のように書ける

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a'\in A} \delta(a|k)\exp(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a)\right)) & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases} \quad (4)$$

- ただし、

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & if\ a \in A(k) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

価値関数の求め方

- Bellman方程式を解く $V_n^d(k) = E\left[\max_{a \in A(k)}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right)\right]$
  - 簡単のために、添え字nとdを省略し、$V_n^d(k) = V(k)$とする
  - 対数をとり式(4)を変換する
  - $e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a)\right)} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases}$ (5)
  - さらにこれを、行列式で定義したい
  - $\boldsymbol{M}\left(|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|\right)$を接続行列として、次のように定義

$$M_{ka} = \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & if\ a \in A(k) \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (6)$$

  - dは後続を持たないので、$\boldsymbol{M}$は$k = d$に全て0の行を持つ

価値関数の求め方

- Bellman方程式を解く
  - $$e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a)\right)} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$
  - $\boldsymbol{M}\left(|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|\right)$
    $$M_{ka} = \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & if\ a \in A(k) \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (6)$$
  - さらに、次のように文字を定義する
    - $\boldsymbol{b}\left(|\tilde{A}| \times 1\right)$
      $$b_k = \begin{cases} 0 & k \neq d \\ 1 & k = d \end{cases}$$
    - $\boldsymbol{z}\left(|\tilde{A}| \times 1\right)$
      $$z_k = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$$
  - すると、次のように簡潔な一次の形で書ける
    $$\boxed{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}} \quad (7)$$

価値関数の求め方

- Bellman方程式を解く

$$\boxed{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}} \quad (7)$$

- **z**が解を持つ条件： $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}$が逆行列を持つこと
  - 逆行列を持たない可能性もあり、パスの数や瞬間効用$\frac{1}{\mu}v(a|k)$による
  - β次第で$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}$が不可逆となるため、パラメータ推定で考慮する必要
- 行列$\boldsymbol{M}^m$は長さがmリンクの任意のリンクペア間のパス効用を含む
  - 2地点間をmステップで移動することの効用は、選択肢が多いほど大きくなる
  - 確定項は定義上負だが0に近い場合、確率項によっては効用が正になることがありうる。
- 中規模ネットワークでは(7)は直接解けることが多いが、大きなネットワークでは直接解法が不可能な場合があり、反復解法を使用することができる。

遷移確率の求め方

- 選択確率に対応する行列$\boldsymbol{P}$を作る
  - 目的地に対する次のリンクの選択確率はオリジンに依存しない。
  - よって確率(3) $P_n^d(a|k) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k)+V_n^d(a)\right)\right)}{\sum_{a'\in A(k)}\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k)+V_n^d(a')\right)\right)}$を行列$\boldsymbol{P}$に整理する。状態$k$に対応する行は次のようになる。

$$\boxed{P_k = \frac{M_k \circ z^T}{M_k z}} \qquad (8)$$

ただし、$\circ$は要素ごとの積、M_kは$\boldsymbol{M}$のk行目を表す。

参考

$$M_{ka} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & if\ a \in A(k) \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad z_k = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$$

- 経路選択確率
  - 経路$\sigma = \{k_i\}_{i=0}^{I} = \{k_0, k_1, \dots, k_I\}$について考える
    - ただし、k_0は出発リンク、$k_I = d$である
  - 経路σの選択確率=経路σが観測された時の尤度$P(\sigma)$は

$$
\begin{aligned}
P(\sigma) &= \prod_{i=0}^{I-1} P(k_{i+1}|k_i) \\
&= \prod_{i=0}^{I-1} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1})\right)\right)}{\sum_{a \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v(a|k_i) + V(a)\right)\right)} \\
&= \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}) - V(k_i)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{\mu} V(k_0)\right) \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(k_{i+1}|k_i)\right) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

定義から
$(\text{分母}) = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$

定義から
$V(d) = 0$

- 経路選択確率
  - $v(\sigma) = \sum_{i=0}^{I-1} v\ (k_{i+1}|k_i)$とおくと

$$P(\sigma) = \exp\left(-\frac{1}{\mu}V(k_0)\right)\prod_{i=0}^{I-1}\exp\left(\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)\right) \qquad (9)$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma)\right)}{\exp\left(\frac{1}{\mu}V(k_0)\right)} = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma)\right)}{\sum_{\sigma'\in\Omega}\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma')\right)} \qquad (10)$$

  - ここで、Ωは全パスの集合(重複を含むため無限の要素が存在)
  - 式(10)の分子は経路σの確定項、分母は可能な経路の確定項和
    →このモデルは無限の選択肢を持つMNLモデルと同等
  - よってIIA特性を持つ
    →経路σ_1とσ_2の確率の比は$v(\sigma_1) - v(\sigma_2)$のみに依存

リンク交通量

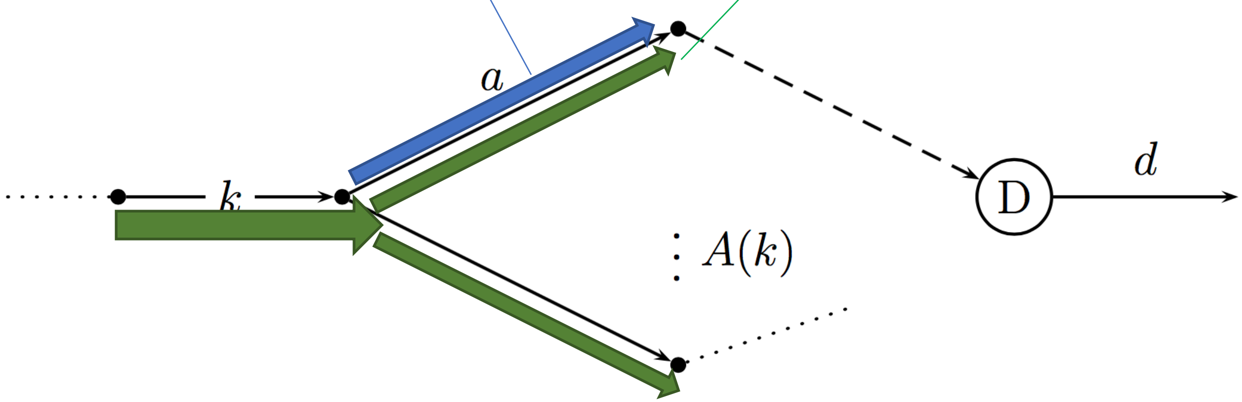
- リンク交通量：リンクdを終点とするトリップを考える
  - $F(a)$：リンクa の交通量(の期待値)
  - $G(a)$：リンクaを起点とするトリップの需要

- 以下のような関係になる

$$F(a) = \underbrace{G(a)}_{\text{リンク}a\text{で発生した量}} + \underbrace{\sum_{k \in A} P(a|k)F(k)}_{\text{流れ込んでくる量}}$$

リンクaで
発生した量

流れ込んでくる量



リンク交通量

- リンク交通量：リンクdを終点とするトリップを考える
  - $F(a)$：リンクa の交通量(の期待値)
  - $G(a)$：リンクaを起点とするトリップの需要

  - 以下のような関係になる

$$F(a) = \underbrace{G(a)}_{\substack{\text{リンク}a\text{で}\\ \text{発生した量}}} + \underbrace{\sum_{k \in A} P(a|k)F(k)}_{\text{流れ込んでくる量}}$$

  - ベクトルを使って表すと次のようになる

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{F} \Leftrightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^T)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \quad (11)$$

  - $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^T)$ は可逆(Baillon and Cominetti (2008))
    →線形方程式でリンク交通量を計算できる

選択肢集合A

- リンク
  - リンクベースで，どこのリンクを通っているか
- ノード
  - ノードベースで，どこのノードを通っているか
  - 地図をタイル状に分割し，そのセントロイドをノードで表し，通ったタイルを経路とする場合も.
- リンク+ノード
  - リンク選択がベースだが，動かない(ノードを選択)という選択もできる
- その他
  - 居住地の変遷をネットワークに見立てるなど

Discounted Recursive Logitモデル(大山羽藤;2017)

- Bellman方程式に時間割引率を導入
  - $V_n^d(k) = \max_{s_{j+1} \in A(k)} E\left[\sum_{t=j}^{\infty} \beta^{t-j} u(\, s_{j+1} \mid s_j; \theta \,)\right]$
    $= E\left[\max_{a \in A(k)} \left(v_n(a|k) + \beta V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right)\right] \; \forall k \in A$
  - 時間割引率を導入することで，将来価値の低減，未来に対する不確実性や，近視眼的な選択を表す
    - $V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a' \in A} \delta(a|k) \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + \beta V_n^d(a)\right)\right) & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases}$
    - $P_n^d(a|k) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + \beta V_n^d(a)\right)\right)}{\sum_{a' \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + \beta V_n^d(a')\right)\right)}$

時空間構造化ネットワーク上での一般化RLモデル

■ RLモデルの問題点

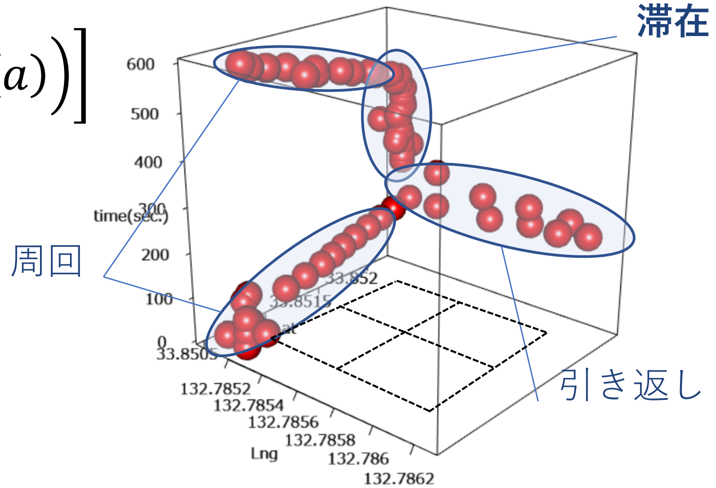
- 将来の効用についての完全情報を仮定。将来の効用に対する不確実性の評価が不可能
- 静的なネットワークのみしか扱えない
- 滞在活動などの時空間的な活動を記述できない

■ 大山・羽藤(2016)：時空間構造化ネットワーク上での一般化RL(gRL)モデル

- 期待効用に時間割引率を導入。将来の効用に対する不確実性を表す
- xy平面に交通ネットワーク、z軸に時間をとった三次元空間
  →時空間ネットワーク上に対応。時間と空間の選択行動を表現可能
- 移動と滞在を考慮した経路選択モデルへと拡張が可能に

$$V_t^{S_T}(k) = E\left[\max_{a\in A(k)}\left(v_n(a|k) + \beta V_{t+1}^{S_T}(a) + \mu\varepsilon_{t+1}(a)\right)\right]$$

・時間表現はタイムステップでなされる
(時刻tの期待効用は、次に選択が行われる時刻t+1の効用から計算される)
→離散時間を用いている
・最大Tの時間制約付き。



正規化時間割引率RLモデル(月田羽藤;2021)

- Bellman方程式に入る時間割引率が時間的な距離を表す
- $V_n^d(k) = E\left[\max_{a \in A(k)} \left(v_n(a|k) + \beta^{l_a} V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right)\right] \ \forall k \in A$
  - 歩行速度が一定だと仮定すると，歩行時間は歩行距離と比例することから，リンク長に応じた時間割引率を導入.
  - l_aはリンクaのリンク長を表す.

- $V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a' \in A} \delta(a'|k) \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + \beta^{l_{a'}} V_n^d(a')\right)\right) & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases}$

- $P_n^d(a|k) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + \beta^{l_a} V_n^d(a)\right)\right)}{\sum_{a' \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + \beta^{l_{a'}} V_n^d(a')\right)\right)}$

課題

課題

- RLモデルを用いた分析を行ってください
  - 敷地：ファイルには豊洲のネットワークを入れていますが，自分で3×3などの簡易ネットワークやを作ったり，別のまちのネットワークを作っても構いません．
  - 分析：配分コード(assign.R)と推定コードを入れてあります．どちらをやっても構いません．また，RやQGISを使った基礎集計も歓迎します．
  - 説明変数：いくつか入れてありますが，選んで使ってください．自分で足しても構いません．
  - 分析の精度を見たいということではなく，手を動かしたということが大事なので，何をやったかと，簡単な感想があれば良いです．