2021夏学期ゼミ#12　2021/5/25

サーチ理論

Mortensen, Dale T. "The matching process as a noncooperative bargaining game." *The Economics of Information and Uncertainty* (1982): 233-258.

交通・都市・国土学研究室

月田 光

目次

はじめに

マッチング

人や物を組み合わせて、単独では達成できない何らかの共通の目的を持った区別可能な実体を形成するプロセス
例)アパートの入居者の割当，労働者と仕事．工場の敷地，結婚，企業集合体

・マッチングが自発的行われ，
・個々のエージェントが不可欠ではない=代替可能性が存在し，
・共同活動の価値(効用)がメンバー毎に分割できる　　　　　問題を考える

目的
Q1.　マッチングの「均衡」状態とは何か？
Q2.　平衡状態は意味のある「効率的」な状態なのか？

・潜在的なメンバーの情報が事前に分からない．よって個々のエージェントが連合形成のプロセスに資源を配分するインセンティブに影響を与える．

はじめに

不完全でコストがかかる情報の条件下でのマッチング形成の問題

- 市場分析における探索理論アプローチと密接している
  - Dale T. Mortensen(1978), Diamond and Maskin(1979)など

- マッチングの余剰の分割は本来二者間交渉問題
  - ペアの各メンバーにとってのマッチの価値を決定する
  - 潜在的なペアに関する価値だ同一でない場合，個々のエージェントは可能な限り最高のマッチを求め，既存のマッチに固執しない.
  - そのため，離別に際し補償がない場合，離別は頻繁に起こる.
  - 部分均衡では，マッチしたペアが分割する際に相手に補償を行えば共有の富を最大化できる

- DiamondとMaskinは、契約法の記述言語を用いて、マッチの価値の分割に関する合意を「契約」と呼び、2つの当事者の一方が開始した分離を「契約違反」と呼び、失われた家賃に等しい補償を要求した.

集合的マッチングモデル

・マッチングが誕生/消滅する確率過程を考える

・異なる2タイプのエージェントからなるペアを形成

・マッチングされていないエージェントのみが探索を行うことができる

文字の定義

・m：タイプ毎のエージェント数=可能なペア数
・ $n(\in \{1,2,\ldots,m\})$：マッチングされていないペア数
・ $a(n)$：新たにマッチが形成される平均的な瞬間率
・ $b(n)$：マッチングプロセスに新たなペアが入る平均的な瞬間率
→ 時間間隔Δtでマッチングが形成される確率は約$\Delta t a(n)$,
時間間隔Δtで新しいペアがシステムに入る確率は約$\Delta t b(n)$
・ $P_t(n)$：時刻tにマッチしないペアがn組存在する確率

$$P_{t+\Delta t}(0) = \Delta t a(1) P_t(1) + \big(1 - \Delta b(0)\big) P_t(0) + O(\Delta t)!$$

$$P_{t+\Delta t}(n) = \Delta t a(n+1) P_t(n+1) + \Delta t a(n-1) P_t(n-1) + [1 - \Delta t a(n) - \Delta b(n)] P_t(n) + O(\Delta t)! \quad n = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{n=0}^{m} P_t(n) = 1$$

- $(n+1)$から減る確率+$(n-1)$から増える確率+ nのままである確率
- $\Delta t \to 0$で$\frac{O(\Delta t)!}{\Delta t} \to 0$となる.
- 最後の条件は $[P_1(0), \ldots, P_t(m)]$が時刻tにおける確率分布であることを表す

- 両辺をΔtで割り，　$\Delta t \to 0$の極限を取ると次のようになる

$$\dot{P}(0) = a(1)P(1) - b(0)P(0),$$

$$\dot{P}(n) = a(n+1)P(n+1) + b(n-1)P(n-1) - [a(n) + b(n)]P(n),$$

$$n = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{n=0}^{m} P(n) = 1.$$

集合的マッチングモデル

- $\left(a(n), b(n)\right) \geq 0$であれば，　$t \to \infty$で定常状態に収束する

$$(1) \qquad a(n+1)P(n+1) + b(n-1)P(n-1) = [a(n)+b(n)]P(n)$$

- ただし境界条件は次のようになる

$$(2a) \qquad a(1)P(1) = b(0)P(0)$$

and

$$(2b) \qquad \sum_{n=0}^{m} P(n) = 1.$$

- マッチング率$a(n)$が線形と二次の二つに分けて考える.

- $b(n)$の仕様を，既存のマッチが平均βで解消されると仮定する

$$(5) \qquad b(n) = \beta(m-n)$$

ここで，　$\frac{1}{\beta}$はマッチの期待持続時間，「回転率」であると言える

- $a(n)$が**線形の場合**，マッチング率はnに比例し，

$$a(n) = \alpha n, \tag{3}$$

- これは，あるひと組が短時間で出会う確率がマッチングされていないペア数に依存しないことを意味する.
- $\alpha\Delta t$はn個の可能性の中から特定のペアがマッチを形成する確率

- $a(n)$が**二次式の場合**,

$$a(n) = \alpha(n/m)n = \alpha n^2/m. \tag{3'}$$

これは，マッチしていない特定のペアが短い時間間隔でマッチする確率は，どちらかのタイプのエージェントがマッチしていない割合に比例する

- タイプ1のエージェントがタイプ2に出会う頻度をα_1とし，逆をα_2とすると，マッチングされていないペアの接触頻度は

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{4}$$

- 既にマッチしたエージェントが一度も合わない場合(3)が，マッチしたエージェントとしていないエージェントが等確率で接触する場合(3')が成り立つ.
- つまり，二次式のケースでは接触するエージェントが既にマッチングしているか否かを事前に区別できない

・(2a)が与えられた時，(1)から帰納的に次のようになる

$$(6) \qquad P(n) = [b(n-1)/a(n)]P(n-1), \qquad n = 1, \ldots, m,$$

また，$P(n+1) = 0$より

$$En \equiv \sum_{n=0}^{m} nP(n) = \sum_{n=1}^{m} nP(n) = \sum_{n=1}^{m+1} nP(n) = \sum_{n=0}^{m} (n+1)P(n+1)$$

線形の場合には，これと(3)(5)(6)より

$$En = \sum_{n=0}^{m} (n+1)[\beta(m-n)/\alpha(n+1)]P(n)$$

$$= (\beta/\alpha) \sum_{n=0}^{m} (m-n)P(n) = (\beta/\alpha)[m - En]$$

よって $\boxed{(7) \qquad E(n/m) = \beta/(\alpha+\beta)}$

・これは，$P(n)$が成功確率$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$，標本サイズ$m$の二項分布と等価

よって$\frac{n}{m}$の分散は次のようになり，$m \to \infty$で消滅.

$$\frac{n}{m^2}\left[\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right]\left[1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right]$$

二次式の場合，同様に次のようになる

$$En^2 \equiv \sum_{n=0}^{m} n^2 P(n) = \sum_{n=1}^{m} n^2 P(n) = \sum_{n=1}^{m+1} n^2 P(n) = \sum_{n=0}^{m} (n+1)^2 P(n+1)$$

よって，(3')(5)(6)から

$$En^2 = \sum_{n=0}^{m} (n+1)^2 [m\beta(m-n)/\alpha(n+1)^2] P(n)$$

$$= (m\beta/\alpha) \sum_{n=0}^{m} (m-n) P(n) = (m\beta/\alpha)(m - En)$$

$$E(n/m)^2 = (\beta/\alpha)[1 - E(n/m)]$$

$\frac{n}{m}$の分散である$E\left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left[E\,\frac{n}{m}\right]^2$は$m \to \infty$で消滅し，次の式にほぼ等しくなる．

$$[E\,n/m]^2 + (\beta/\alpha)E(n/m) - (\beta/\alpha) = 0$$

$$\boxed{(7') \qquad E(n/m) = \frac{1}{2}\left[(\beta/\alpha)^2 + 4(\beta/\alpha)\right]^{1/2} - \frac{1}{2}(\beta/\alpha)}$$

式(7)(7')は次のことを意味する

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ここで，$f(x)$は$f(0) = 0, f(\infty) = 1$となる増加凹関数

・弾性率$\eta(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$はどちらも$x \to \infty$の方向に減少し，0になる

$$\eta(0) = \begin{cases} 1 & \text{if linear,} \\ \frac{1}{2} & \text{if quadratic.} \end{cases}$$

つまり，αに対してβが小さい場合，マッチングされていないエージェントの割合の期待値が線形の場合は約$\frac{\beta}{\alpha}$，二次の場合は$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$となる

(Diamond and Maskin (1979)が仮定した仕様に相当)

マッチングの均衡

・マッチングされていないエージェントの**探索強度の選択**に関する均衡理論を構築する

→これらの選択は、マッチが形成される確率的な割合（特に前節のパラメータα）を決定するので、この理論は二者間のマッチングプロセスを研究するための行動基盤となる。

定義

・探索強度s_i :=期待される反対のタイプのエージェントに接触する頻度

→よって，時間間隔Δtでタイプ$j \neq i$のエージェントと接触を開始する確率は約$s_i \Delta t$となる．(正確には，Δtで接触するエージェント数の期待値が$s_i \Delta t$)

・$c_i(s)$:=単位時間あたりの探索コスト，非負の実数に対して定義される単調増加な凸関数，$c_i(0) := 0$

・ある特定のペアが時間間隔Δtで会う確率は線形で$\Delta t(s_1 + s_2)$，二次で$\Delta t(s_1 + s_2)\frac{n}{m}$

マッチングの均衡

- マッチング前には，マッチしていないペアは相手に関する情報を持たず，期待される効用は全て同一
- マッチング後に「品質」「適合性」と解釈される値$x \in [0,1]$が観測され，マッチングの効用(原文value of the match) $w(x)$が決定される．$w(x)$は正の連続増加関数.
- お互いを知るプロセスは累積分布関数$F(x)$からの無作為抽出． $F(x)$も連続.
- マッチの価値(効用?)の分割は，エージェント$i = 1,2$に対して$\big(w_1(x), w_2(x)\big)$.
- 分割と$F(x)$は全ペアに同じで全エージェントに公開情報，分割は会った後に行われる.
- $v_i(t) \coloneqq$タイプiのエージェントが最適な探索戦略をした場合の，将来の純利益の期待現在価値.

マッチングの均衡

- まず線形の場合について，Δt後の効用について考える．
- タイプiのエージェントがタイプ$j \neq i$のエージェントに時間間隔Δtで会う確率は$\Delta t\left(s + s_j(t)\right)$
  (sは選択された探索強度，$s_j(t)$タイプjに共通する探索強度であり，既知とする)

- もし出会わなければ探索を続け，その期待値は定義より$v_i(t + \Delta t)$
- 出会った場合，$x \in [0, 1]$が観測され，分割$\left(w_1(x), w_2(x)\right)$を検討する．
- マッチングが成立するのは，各エージェントの効用が期待効用より高い場合

$$(w_1(x), w_2(x)) \geq (v_1(t+\Delta t), v_2(t+\Delta t)) \tag{9}$$

- この不等式で定義される品質xの部分集合を「許容できる集合」とし，$A(t + \Delta t) \subset [0, 1]$とする．

- Bellman方程式は次のようになる

$$v_i(t) = \max_{s \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} -\Delta t c_i(s) + \dfrac{\Delta t}{1 + r\Delta t}\left(s + s_j\right) \left[\begin{array}{c} \Pr\{x \in A(t + \Delta t)\} \times E\{w_i(x) | x \in A(t + \Delta t)\} \\ + \Pr\{x \notin A(t + \Delta t)\}\, v_i(t + \Delta t) \end{array} \right] \\ \qquad + \dfrac{1}{1 + r\Delta t}\left[1 - \Delta t\left(s + s_j\right)\right] v_i(t + \Delta t) \end{array} \right\}$$

$\Delta t c_i(s)$：エージェントの負担した探索コスト，r：割引率(全エージェントに共通)

・Bellman方程式(再掲)

$$(10)\quad v_i(t) = \max_{s\geq 0}\{-\Delta t c_i(s) + \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}(s+s_j)[\Pr\{x\in A(t+\Delta t)\}$$
$$\times E\{w_i(x)|x\in A(t+\Delta t)\} + \Pr\{x\notin A(t+\Delta t)\}v_i(t+\Delta t)]$$
$$+\frac{1}{1+r\Delta t}[1-\Delta t(s+s_j)]v_i(t+\Delta t)\},\qquad j\neq i,\ i=1 \text{ and } 2,$$

$\Delta tc_i(s)$：エージェントの負担した探索コスト
r：割引率(全エージェントに共通)

・全ての未マッチのエージェントは利益を最大化するようにを探索強度を選択
・式(10)を解く探索戦略選択ゲームのナッシュ解を$\left(s_1^0(t), s_2^0(t)\right)$とする
・ゲームは連続的に繰り返され，全ての$(t,\Delta t)$に対し定常解$v(t)=v(t+\Delta t)$を持つとする．ただし，A^oは定常下での$A(t+\Delta t)$.

$$(10a)\quad rv_1^0 = \max_{s_1\geq 0}[(s_1+s_2^0)\Pr\{x\in A^0\}[E\{w_1(x)|x\in A^0\}-v_1^0]-c_1(s_1)]$$

and

$$(10b)\quad rv_2^0 = \max_{s_2\geq 0}[(s_1^0+s_2)\Pr\{x\in A^0\}[E\{w_2(x)|x\in A^0\}-v_2^0]-c_2(s_2)],$$

$\left(s_1^0(t), s_2^0(t)\right)$：式(10)を解く探索戦略選択ゲームのナッシュ解
(s_1^0, s_2^0)：定常下での非協力的なナッシュ探索強度ペア
(v_1^0, v_2^0)：定常下での期待ペイオフ

マッチングの均衡

- エージェントが出会った時に直面する**二者間交渉問題**を考える．

- $\left(w_1(x), w_2(x)\right)$は任意であるため，総和$w(x)$が期待効用の和$v_1^o + v_2^o$を上回っていても，需要可能な $x \in A^o$とは限らない．
- しかし，このような状況では他の分割が存在し，それによりv_1^o, v_2^oよりも高い利益を得ることができる．

- よって，実現可能で，個別的にも共同的にも合理的な分割

(11a) $$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

and

(11b) $$w(x) \geq v_1^0 + v_2^0 \Rightarrow (w_1(x), w_2(x)) \geq (v_1^0, v_2^0), \qquad \forall x \in [0,1],$$

は二者間交渉問題の均衡結果となりうる．

- 対照的な二者間交渉の理論では，(11)以上の一般的に認められた制約は無い．

マッチングの均衡

・**定義**

線形マッチングの式(10)(11)から得られる式(12a)(12b)(13a)(13b)を満たすとき,
以下をマッチングの非協力/交渉ゲームの組み合わせの均衡解とする.

・全ての可能なマッチの配分$(w_1^o, w_2^o): [0,1] \to \mathbb{R}_+^2$
・探索戦略ペア$(s_1^o, s_2^o) \in \mathbb{R}_+^2$

(12a) $$rv_1^0 = \max_{s_1 \geq 0}[(s_1 + s_2^0)E\max[w_1^0(x) - v_1^0, 0] - c_1(s_1)],$$

(12b) $$rv_2^0 = \max_{s_2 \geq 0}[(s_1^0 + s_2)E\max[w_2^0(x) - v_2^0, 0] - c_2(s_2)]$$

and

(13a) $$w_1^0(x) + w_2^0(x) = w(x), \qquad \forall x \in [0,1],$$

(13b) $$w(x) \geq v_1^0 + v_2^0 \Rightarrow (w_1^0(x), w_2^0(x)) \geq (v_1^0, v_2^0)$$

・均衡探索強度ペアは交渉結果に対するナッシュ戦略であり、交渉結果はそれによって誘発される非協力的ナッシュペイオフを考えると実現可能であり、個人の合理性がある。

マッチングの均衡

- xの許容できる集合は$A^o = \{x \in [0,1] | w(x) \geq v_1^o + v_2^o\}$

- $w(x)$はxに対して非減少なので，許容できるxに対し$x \geq x^o$となるような臨界フィット$x^o \leq 1$が存在する． x^oは最小の解である．

$$(14) \qquad w(x^0) = v_1^0 + v_2^0.$$

- 一方，二者間交渉問題の不確定性の結果として，一般に多くの均衡が存在．

- 均衡の結果の候補として，あらゆる可能な価値の分割のファミリーを考える

$$(15a) \qquad w_1^0(x) = v_1^0 + \theta[w(x) - v_1^0 - v_2^0], \qquad \forall x \in [0,1],$$
$$(15b) \qquad w_2^0(x) = v_2^0 + (1-\theta)[w(x) - v_1^0 - v_2^0], \qquad \forall x \in [0,1].$$

- このルールでは， $\theta \in [0,1]$のすべての選択に対して(13a)(13b)を満たす．
- エージェント間のマッチの余剰をθと$(1-\theta)$に分けるものであり， $\theta = \frac{1}{2}$の場合，対称な二者間交渉問題に対する解となる．

マッチングの均衡

命題1． 線形のマッチングにおいて，(i) $c_1'(0) < \theta Ew(x)$または(ii) $c_2'(0) < (1-\theta)Ew(x)$のいずれかであるすべての$\theta \in [0,1]$に対してユニークな非自明のマッチング均衡が存在する。

- (i)(ii)は自明でない均衡解のために必要十分なものである
- つまり，**両方とも満たされない場合**，マッチしていないエージェントは相手を見つけようとする期待利益に比べてコストが高すぎるため，**探索を行わない**

- 均衡状態において
  マッチング率は

$$\alpha^0 = (s_1^0 + s_2^0)\Pr\{x \in A^0\} = (s_1^0 + s_2^0)[1 - F(x^0)], \tag{19}$$

→マッチング率は，接触する頻度と，ランダムな面会で許容できるマッチングx^oが得られる確率の積に等しい．

→定常平衡状態でマッチングしていない割合は式(7) $E\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$より，
余剰のシェアであるθによって変化する

証明.
(12)と(15)から次のようになる．ただし，$v^o \equiv v_1^o + v_2^o$

$$(16a)\qquad rv_1^0 = \max_{s_1 \geq 0}[(s_1 + s_2^0)\theta E \max[w(x) - v^0, 0] - c_1(s_1)],$$

$$(16b)\qquad rv_2^0 = \max_{s_2 \geq 0}[(s_1^0 + s_2)(1-\theta) E \max[w(x) - v^0, 0] - c_2(s_2)],$$

(15)で定義されるすべての要素は(14)を満たすため，すべての$\theta \in [0,1]$に対して(16)を解く戦略が存在することを示せば良い.
コスト関数は凸であるため，(16)の最適化問題の解はv^oに対して一意.
$(s_1, s_2) = (\sigma_1(v), \sigma_2(v))$を以下の最適化の十分条件で定義される関数とする

$$(17a)\qquad c_1'(s_1) \geq \theta E \max[w(x) - v, 0], \qquad \text{equality if } s_1 > 0,$$

$$(17b)\qquad c_2'(s_2) \geq (1-\theta) E \max[w(x) - v, 0], \qquad \text{equality if } s_2 > 0.$$

ここで，$c_1'(s_1), c_2'(s_2)$はともに連続かつ増加関数なので，$\sigma_1(v), \sigma_2(v)$はともに連続で非増加.
さらに$c_1'(s_1) \geq 0, c_2'(s_2) \geq 0, w(1) \geq w(x)$と(17)より，$\sigma_1(w(1)) = \sigma_2(w(1))$=0
仮説は，$\sigma_1(0) > 0, \sigma_2(0) > 0$または両方を意味する.
(16)(17)よりv^oは次のように定義される連続関数$\phi(v)$の固定点

$$(18)\qquad r\phi(v) = \max_{s_1 \geq 0}[(s_1 + \sigma_2(v))\theta E[w(x) - v, 0] - c_1(s_1)] + \max_{s_2 \geq 0}[(\sigma_1(v) + s_2)(1-\theta) E[w(x) - v, 0] - c_2(s_2)].$$

$(s_1^o, s_2^o) = (\sigma_1(v^o), \sigma_2(v^o))$より，$\phi(v)$が一意の固定点を持つことを証明すれば良い.
$Ew(x) > 0, c_1(0) = c_2(0) = 0$なので，$\sigma_1(0) > 0, \sigma_2(0) > 0$のいずれかまたは両方が$\phi(0) > 0$を意味する．さらに，$\sigma_1(w(1)) = \sigma_2(w(1))$=0より$\phi(w(1)) = 0$.
よって$\phi(v)$の連続性は$v^o = \phi(v^o) \in (0, w(1))$を保証するのに十分，また，(18)と$\sigma_i(v)$が非増加であることは$\phi(v)$が減少していることを意味するので，固定点は一意となる.

マッチングの均衡

- 二次式の場合.
  式(12)を修正することで二次においてもマッチング均衡の存在を証明できる

- 時間間隔Δtにタイプiの個々のエージェントがマッチしていないタイプ$j \neq i$ のエージェントを見つけるか見つけられる確率は$\Delta t\left[s+s_j\right](\frac{n}{m})$

s：自身の探索強度
s_j：他のタイプに共通する探索強度
$\frac{n}{m}$：各タイプのマッチしていない割合
=見つけたエージェントがマッチしていない割合

- エージェントが多い時，$\frac{n}{m}$はほぼ非確率的で，定常状態では$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

- Bellman方程式

$$v_i = \max_{s \geq 0}\{-\Delta t c_i(s) + \frac{\Delta t}{1+r\Delta t}(s+s_j)f(\beta/\alpha)E\max[w_i(x), v_i^0] + \frac{1}{1+r\Delta t}[1-\Delta t(s+s_j)f(\beta/\alpha)]v_i\},$$

- タイプiの特定のエージェントが効用を最大化する探索強度sを選択
- 他のすべてのエージェントが選択した探索強度が既知(所与とする)

マッチングの均衡

・非協力なナッシュ探索強度ペア(s_1^o, s_2^o)は，以下を満たす．

$$\text{(20a)} \quad rv_1^0 = \max_{s_1 \geq 0} [(s_1 + s_2^0) f(\beta/\alpha^0) E \max[w_1(x) - v_1^0, 0] - c_1(s_1)],$$

$$\text{(20b)} \quad rv_2^0 = \max_{s_2 \geq 0} [(s_1^0 + s_2) f(\beta/\alpha^0) E \max[w_2(x) - v_2^0, 0] - c_2(s_2)],$$

ただし，

$$\text{(21a)} \quad \alpha^0 = (s_1^0 + s_2^0)[1 - F(x^0)]$$

and

$$\text{(21b)} \quad x^0 = w^{-1}(v^0).$$

・(12)の条件を(20)に置き換えることで，
二次の場合でもマッチング均衡の十分条件が得られる．

・線形の時と同様に，式(15)に従い$\theta \in [0,1]$で剰余の分配を行う

命題2． 二次のマッチングにおいて，(i) $c_1'(0) < \theta E w(x)$または(ii) $c_2'(0) < (1-\theta) E w(x)$のいずれかであるすべての$\theta \in [0,1]$に対して非自明のマッチング均衡が存在する。

証明.
(15)と(20)から次のようになる．ただし，$v^o = v_1^o + v_2^o$

$$(22a)\quad rv_1^0 = \max_{s_1 \geq 0} [(s_1^0 + s_2) f(\beta/\alpha^0)\theta E \max[w(x) - v^0, 0] - c_1(s_1)],$$

$$(22b)\quad rv_2^0 = \max_{s_2 \geq 0} [(s_1^0 + s_2) f(\beta/\alpha^0)(1-\theta) E \max[w(x) - v^0, 0] - c_2(s_2)],$$

任意のv^o(以下vとする)が与えられた時のナッシュ探索強度ペア(s_1, s_2)の必要十分条件を考える.

$$(23a)\quad c_1'(s_1) \geqq f(\beta/\alpha)\theta E \max[w(x) - v, 0], \qquad \text{equality if } s_1 > 0,$$

$$(23b)\quad c_2'(s_2) \geqq f(\beta/\alpha)(1-\theta) E \max[w(x) - v, 0], \qquad \text{equality if } s_2 > 0.$$

$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$は増加関数，　$\alpha = (s_1, s_2)\left[1 - F\left(w^{-1}(v)\right)\right]$であるため，方程式は$\sigma_1(0) > 0, \sigma_2(0) > 0$かつ$\sigma_1\left(w(1)\right) = \sigma_2\left(w(1)\right)$=0となるような連続関数$\left(\sigma_1(v), \sigma_2(v)\right)$を定義することになる.

従って，$v\left(w(1)\right) = 0$，　$v(0) > 0$より固定点$v^o = \phi(v^o) \in \left(0, w(1)\right)$が存在し，　$\phi(v)$は次のように定義される関数.

$$r\varphi(v) = \max_{s_1 \geqq 0} [(s_1 + \sigma_1(v)) f(\beta/\alpha(v))\theta E \max[w(x) - v, 0] - c_1(s_1)]$$

$$+ \max_{s_2 \geqq 0} [(\sigma_1(v) + s_2) f(\beta/\alpha(v))(1-\theta) E \max[w(x) - v, 0] - c_2(s_2)]$$

and

$$\alpha(v) = [\sigma_1(v) + \sigma_2(v)][1 - F(w^{-1}(v))].$$

関数$\left(\sigma_1(v), \sigma_2(v)\right)$は非増加関数である必要はないので，命題1の一意性を証明するための議論は成立しない.
それでもすべての固定点v^oに対して，　$(s_1^o, s_2^o) = \left(\sigma_1(v^o), \sigma_2(v^o)\right)$は平衡探索強度ペアとなる.

マッチングの効率

- 線形マッチングのケースでは，マッチングしていないエージェントはどの均衡においても十分に徹底的に探索しない
  - 具体的には，マッチングしていないすべてのカップルにより好ましい探索強度ペア$(s_1, s_2) > (s_1^o, s_2^o)$が存在する．

- マッチング頻度は全エージェントの探索頻度で決定されるため，一方の探索強度が増加すると，他方のタイプのメンバーに探索の価値が増大

- しかし，個々のエージェントはこの外部経済を考慮していない．

目的：ほとんどの均衡は非効率的だが，より一般的なクラスの実現可能で個々に合理的な交渉結果が認められれば、共同の富を最大化する均衡が存在することを示す

マッチングによる余剰をマッチングを行なったエージェントにすべて配分することで，この外部性を内部化することを目指す．

マッチングの効率

二次の場合

・前ページの外部性は二次にも存在するが，逆の効果を持つ外部性もある

・この外部性は，期待される出会い率がマッチングされていないペアの割合に比例し，これが探索強度の合計の減少関数として内省的に決定されるために生じる．

・第1の外部性がない場合、他のすべてのエージェントがより集中的に探索することで、出会ったエージェントがマッチしない確率が減り、各個人の探索に対するリターンが減少する。

・すべてのマッチングに起因する余剰が平等に共有されている場合，マッチングされないエージェントの割合がゼロに近づくと，限界において第2の外部性の効果は第1の外部性の効果と相殺される．

・一般的なケースでは，共同の富の最大化のためには，仲人が各マッチに起因する余剰のより大きなシェアを受け取ることが必要

- 式(16)の条件は$(v_1^o, v_2^o) = \left(v_1(s_2^o), v_2(s_1^o)\right)$となる関数$v_i\left(s_j\right)$を暗に定義

- $(s_1^o, s_2^o) > 0$とすると，これらの関数とナッシュ戦略選択の一時条件により，反応曲線の交点として(s_1^o, s_2^o)が定義される.
- (16)(17)は次を意味する

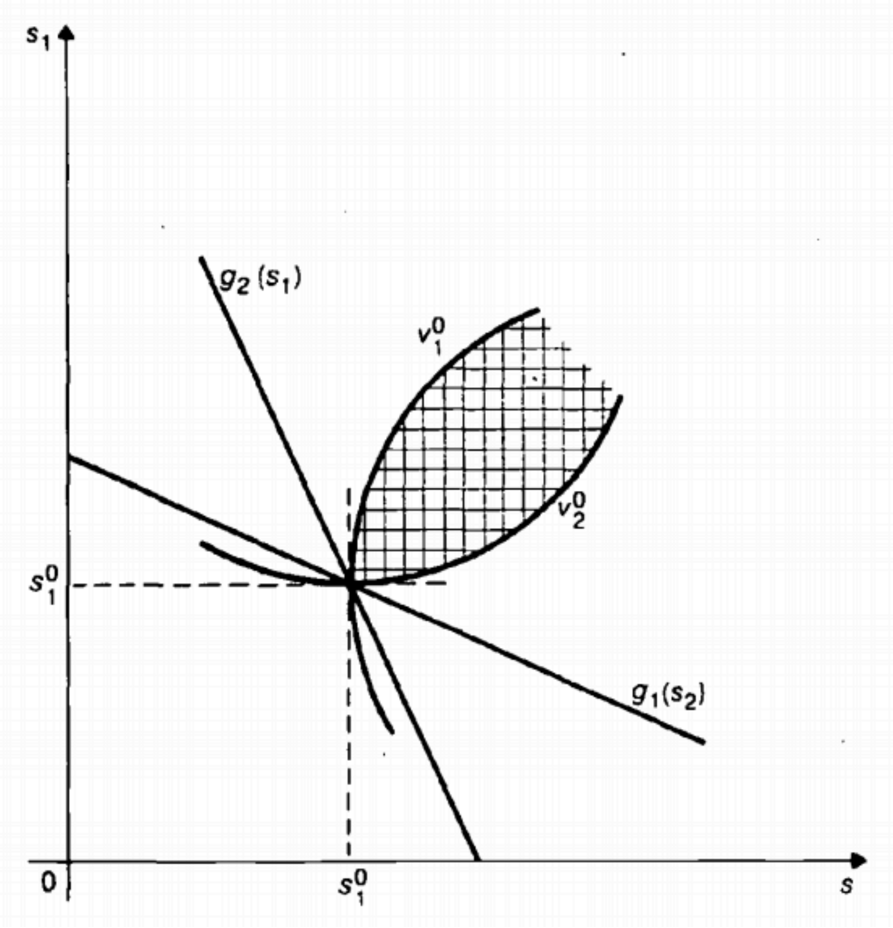
$$c_1'(s_1^0) = E\max[w_1^0(x) - v_1(s_2^0), 0]$$

$$c_2'(s_2^0) = E\max[w_2^0(x) - v_2(s_1^0), 0].$$

- $g_i\left(s_j\right), i \neq j$を，二つの式で暗黙的に定義される二つの反応曲線とする.

マッチングの効率

- $c_i'(s_i)$と$v_i(s_i)$は増加関数なので，一方のタイプが他方のタイプの強度を与えられた時の最適な選択$g_i(s_j)$は，図のように連続的に減少している.
- 図中のv_1^o, v_2^oと書かれた曲線は，エージェントが(s_1^o, s_2^o)で得られるのと同じ探索の価値を得る強度のペアを示す
- 右図の斜線部の強度ペアはすべて(s_1^o, s_2^o)より大きな効用を持つ



マッチングの効率

- 形成される**マッチの平均品質xも低い**
  - 優先領域(前ページグラフ斜線部)内の強度ペアに対して$v = v_1 + v_2 > v^o = v_1^o + v_2^o$であるため，許容適合度$w^{-1}(v)$は平衡状態より大きくなる.

  →マッチング率$\alpha = (s_1 + s_2)[1 - F(w^{-1}(v))]$は小さすぎることがある.
  →全部のマッチングが事後に同一の価値wを持つ場合を除き，マッチングされていないエージェントの均衡割合$\frac{\beta}{\alpha^o+\beta}$が大きすぎることを一義的には意味しない

- マッチしていないエージェントは**十分徹底的に探索しない**.
  →他のタイプのエージェントを探すのに必要なコストと引き換えに，本来マッチング形成に起因する社会的利益$w(x) - v_1^o$を受け取ることを期待していない.
  →マッチングに起因する余剰である純利益全体を，マッチング形成のために接触に成功したエージェントに分配することで，外部性を内部化できる.

定義

$w_{ij}(x)$をタイプjのエージェントが接触した結果，タイプiのエージェントにとっての適合度$x \in [0,1]$のマッチが起こった場合の価値とする

線形のマッチングでの非協力的交渉ゲームの均衡解

割当ルール$\left(w_{1j}^{o}, w_{2j}^{o}\right) : [0,1] \to \mathbb{R}_{+}^{2}, j = 1,2$
強度ペア$(s_1^o, s_2^o) \in \mathbb{R}_{+}^{2}$

$$(24a) \qquad rv_1^0 = \max_{s_1 \geq 0} \{s_1 E \max[w_{11}^0(x) - v_1^0, 0] + s_2^0 E \max[w_{12}^0(x) - v_1^0, 0] - c_1(s_1)\},$$

$$(24b) \qquad rv_2^0 = \max_{s_2 \geq 0} \{s_1^0 E \max[w_{21}^0(x) - v_2^0, 0] + s_2 E \max[w_{22}^0(x) - v_2^0, 0] - c_2(s_2)\}$$

and for $j = 1$ and 2,

$$(25a) \qquad w(x) = w_{1j}^0(x) + w_{2j}^0(x), \qquad \forall\ x \in [0,1],$$

$$(25b) \qquad w(x) \geq v_1^0 + v_2^0 \Rightarrow (w_{1j}^0(x), w_{2j}^0(x)) \geq (v_1^0, v_2^0), \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

マッチングの効率

・式(24)はナッシュ強度ペア．マッチングの各当事者が得る剰余は、誰がコンタクトを取ったかに依存する

・

(26) $$w_{ij}^{0}(x) = \begin{cases} v_i^0 + w(x) - v_1^0 - v_2^0 & \text{if } j = i, \\ v_i^0 & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

という特殊な場合を除き，外部性は依然として存在

・(24)(26)より

$$rv^0 = \max_{(s_1,s_2)\geq 0}[(s_1+s_2)E\max[w(x)-v^0,0] - c_1(s_1) - c_2(s_2)]$$

where $v^0 = v_1^0 + v_2^0$. Hence,

(25)の条件は、価値の偶発的な配分が実現可能であり、個々人が合理的であることを要求している。

命題3． 線形のマッチングにおいて，マッチングしていないカップルの共同富は、すべてのマッチングに関連するすべての余剰がその形成に責任のあるエージェントに割り当てられている場合に限り、均衡において最大となる。

マッチングの効率

命題4． 二次のマッチングにおいて，すべてのマッチングを行う責任のあるエージェントにその余剰の$1-\eta\left(\frac{\beta}{\alpha^*}\right)$のシェアを割り当てる偶発的な交渉結果が与えられた場合、すべてのマッチングされていないカップルの共同富を最大化する探索強度ペアは、探索強度選択ゲームのナッシュ解となる。

・複数の均衡が存在する可能性があるため，逆は保障されない

・命題2の議論を用いて、接触を担当したエージェントを条件としたシェアに応じて余剰を配分するルールであれば、均衡を確立することができる。
・二次式のマッチングは(24)の条件を次のように書き換えることで得られる。

$$(27a)\qquad rv_1^0 = \max_{s_1\geq 0}\{s_1 f(\beta/\alpha^0)E\max[w_{11}^0(x)-v_1^0,0]-c_1(s_1)$$
$$+\,s_2^0 f(\beta/\alpha^0)E\max[w_{12}^0(x)-v_1^0,0]\},$$

$$(27b)\qquad rv_2^0 = \max_{s_2\geq 0}\{s_2 f(\beta/\alpha^0)E\max[w_{22}^0(x)-v_2^0,0]-c_2(s_2)$$
$$+\,s_1^0 f(\beta/\alpha^0)E\max[w_{21}^0(x)-v_2^0,0]\},$$

・(27)から，線形の場合の効率的な割り当てルール$\left(w_{ij}^o = v_i^o, j\neq i\right)$を採用した場合、すべてのエージェントが集中的に探索しすぎる

マッチングの効率

・ここで，$f(\frac{\beta}{\alpha})$は(7')で定義される増加関数であり，許容できるマッチが形成される平衡率は (28)

$$\alpha^0 = (s_1^0 + s_2^0)[1 - F(w^{-1}(v^0))]$$

・全員がより集中的に探索することで、将来接触したエージェントがマッチしない確率が下がる$(f'(\bullet) > 0)$ことは、どの個人も考慮していない.

・特定のマッチングを行う責任のあるエージェントに余剰のすべてを配分しないルールが，望ましいインセンティブ特性を持つことを示唆.

・共同の富の最大化問題は

(29a)
$$rv^* = \max_{(s_1, s_2) \geq 0} \{(s_1 + s_2) f(\beta/\alpha) E \max[w(x) - v^*, 0] - c_1(s_1) - c_2(s_2)\}$$
$$= (s_1^* + s_2^*) f(\beta/\alpha^*) E \max[w(x) - v^*, 0] - c_1(s_1^*) - c_2(s_2^*),$$

where

(29b)
$$\alpha = (s_1 + s_2)[1 - F(w^{-1}(v^*))].$$

・$f'(\bullet)$は式(7')により$f\ (0) > 0$となる増加凹関数なので，(29b)右辺は(s_1, s_2)において厳密に凹.

マッチングの効率

・探索$v_1 + v_2$の期待の総和を最大化をする戦略ペア(s_1^*, s_2^*)を決定するには，次の一時条件を満たせば十分．

$$(30)\qquad c_i'(s_i^*) \geq \left[f(\beta/\alpha^*) + (s_1^* + s_2^*) f'(\beta/\alpha^*) \frac{\partial(\beta/\alpha)}{\partial(s_1+s_2)} \right] \times \frac{\partial(s_1+s_2)}{\partial s_i} E\max[w(x) - v^*, 0] = [1 - \eta(\beta/\alpha^*)] f(\beta/\alpha^*) E\max[w(x) - v^*, 0],$$

・弾性率$\eta(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$は$s_i^* > 0$の場合に，厳密な等式が成り立つ

・$\eta(0) = \frac{1}{2}, f(0) = 0, \eta(\infty) = 0, f(\infty) = 1$

・こちらも定点観測の議論を適用することでv^*の存在を証明できる．

・式(29)(30)は実現可能で個々に合理的な条件付き交渉の結果が与えられれば、共同の富を最大化する強度ペアはナッシュ解となることを意味する

$$(31)\qquad w_{ij}(x) = \begin{cases} v_i^0 + [1 - \eta(\beta/\alpha^*)][w(x) - v_1^0 - v_2^0] & \text{if } j = i, \\ v_i^0 + \eta(\beta/\alpha^*)[w(x) - v_1^0 - v_2^0] & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

・よってすべてのナッシュ解(s_1^o, s_2^o)は次を満たす

$$(32)\qquad rv^0 = \max_{(s_1, s_2) \geq 0} \{(s_1 + s_2)[1 - \eta/\beta/\alpha^*)] f(\beta/\alpha^0) \times E\max[w(x) - v^0, 0] - c_1(s_1) - c_2(s_2)\} + (s_1^0 + s_2^0)\eta(\beta/\alpha^*) f(\beta/\alpha^0) E\max[w(x) - v^0, 0],$$

・この結果，次のようになる．ただし，等号成立は$s_i^o > 0$

$$(33)\qquad c_i'(s_i^0) \geq [1 - \eta(\beta/\alpha^*)] f(\beta/\alpha^0) E\max[w(x) - v^0, 0]$$

・(29)(30)は(32)(33)を満たすため，命題4が導かれる

マッチングの効率

命題5. 命題4の仮説を考えると、共同富を最大化する探索強度のペア(s_1^*, s_2^*)は一意であり、配分ルール(31)に関連する任意のナッシュ解(s_1^o, s_2^o)に対し$(s_1^*, s_2^*) \geq (s_1^o, s_2^o)$.

- 命題5は、以下の命題4の逆を立証するために必要な手段を提供する

命題6. 命題4の仮説を考えると、探索強度選択ゲームのナッシュ解は、全てのマッチが事後的に同一のとき($w(x) = w$ $\forall x \in [0,1]$)、すべてのマッチしていないカップルの共同富を最大化する.

- 各マッチングを行うエージェントが全ての余剰を受け取る場合，エージェントの取り分$[w(x) - v^o]$に比例率$\eta(\beta/\alpha^*)$で課税し，その税収を他のエージェントに再配分すれば共同富最大化均衡が成立する.
- 最適な税率は共同の富を最大化する会合率$\alpha^* = \left[1 - F\left(w^{-1}(v^*)\right)\right]$に依存
- $\mathrm{E}\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \eta(0) = \frac{1}{2}, f(0) = 0, \eta(\infty) = 0, f(\infty) = 1$より，均衡状態でマッチングしないエージェントの割合が0に近くユニークである場合には約1/2，割合が1に近くユニークである場合は0となる.
- マッチが事後的にあまり異質でなければ均衡の一意性は保障される.

マッチングの均衡

命題5. 証明.
$\frac{1}{2} \geq \eta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 0$であり， $c_1'(s_1), c_2'(s_2)$は連続な増加関数なので，以下のように定義される連続な増加関数$v(s_1, s_2)$が得られる．

$$rv(s_1, s_2) = [s_1 c_1'(s_1) + s_2 c_2'(s_2)]/[1 - \eta(\beta/\alpha^*)] - c_1(s_1) - c_2(s_2)$$

(29)(30)より$v^* = v(s_1^*, s_2^*), c_1'(s_1^*) = c_2'(s_2^*)\ if\ (s_1^*, s_2^*)$
一方(32)(33)より$v^o = v(s_1^o, s_2^o), c_1'(s_1^o) = c_2'(s_2^o)\ if\ (s_1^o, s_2^o)$
v^*が一位であり，定義により$(s_1^*, s_2^*) \geq (s_1^o, s_2^o)$である．

命題6. 証明.
均衡状態では全てのマッチが許容される$(w \geq v^o)$ので$\alpha^o = (s_1^o + s_2^o)\left[1 - F\left(w^{-1}(v^o)\right)\right] = s_1^o + s_2^o$
従って，(33)は次のように書き換えられる

$$(34a)\quad c_1'(s_1^0) \geq [1 - \eta(\beta/\alpha^*)]f(\beta/(s_1^0 + s_2^0))[w - v^0], \qquad \text{equality if } s_1^0 > 0,$$

and

$$(34b)\quad c_2'(s_2^0) \geq [1 - \eta(\beta/\alpha^*)]f(\beta/(s_1^0 + s_2^0))[w - v^0], \qquad \text{equality if } s_2^0 > 0.$$

$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), c_1'(s_1), c_2'(s_2)$は連続する増加関数なので，(34)の解はあらゆる$v^o$の選択に対して一意で，$v^o$が増加するにつれて減少する． $v^o = v^*$の時に(s_1^*, s_2^*)が(34)を解き， $v^* > v^o$は$(s_1^*, s_2^*) < (s_1^o, s_2^o)$を意味し，命題5に矛盾

まとめと再解釈

・線形，二次式，どちらのマッチングでも，合理的な剰余の分割により
　マッチしていないエージェントに**効率的な探索を動機づける**
　→この配分は，マッチングを行なったエージェントがより多くの利益を受け取る
　→マッチしていないペアの期待効用は，この配分規則の時に最大化.

・しかし一度会った個人はその分割に同意するインセンティブを持たない
　マッチングを行なったエージェントが会ったあとに交渉上有利にもならない

→事後的な二者間交渉によっては効率的な合意が得られない.

・一方，事前に約束することできない(会わないと交渉できないため)

→マッチングサービスを提供し，それにより交渉結果に継続的な関心を持つ第三者を導入することで解決できるかもしれない

例)労働市場，住宅市場，結婚市場

・仲介業者が存在する役割の一つとしても考えられる.

まとめと再解釈

・ある目的のためにペアとしてマッチさせる二種類のプリンシパルがいるとする
・しかし，各プリンシパルが自分で検索するコストは非常に高いと仮定
・プリンシパルはより経済的に検索できるため仲介人を雇うことができる
・全プリンシパルが自力で検索しないとすると， $w(x)$と仲介人に支払う二人分の成功報酬$p(x)$の差が0以上となるxで受け入れ可能
・すべてのプリンシパルで機会費用が同じであれば，少ない仲介人資源を巡ってプリンシパルの間で価格競争が起こり，手数料は$w(x)$まで上昇
→こうなると，エージェントとはプリンシパルを代表する仲介人と解釈できる

・プリンシパルの視点からはすべてのマッチが等価で，必要な時間の長さに無関心であるため，検索強度，許容できるx^oは仲介人の裁量で決定
・よってs_iは仲介人の選択する探索強度， v_iは仲介人が探す努力の見返りとして期待できる利益の現在価値， $w(x)$の配分は，マッチしたプリンシパルが支払う手数料を仲介人が分割すること．

・仲介人はマッチングサービス市場に継続した関心を持っている
・そのため効率的な配分ルールを事前に約束するインセンティブを持つ
・また第三者としてそのための手段を持つ

まとめと再解釈

- 市場によって，マッチを行なった仲介人が手数料をすべて受け取る場合も所定の方法で分配する場合もある
  →効率的配分ルールがマッチングの携帯に依存するという研究結果に合う

- このようなモデルの再解釈はブローカーが導入されると特殊になる

- 実際にはマッチングによる機会費用は同じタイプのプリンシパルすべてに同じではない
  - この異質性は一部の者に限界外収益をもたらし，仲介人の探索強度に関心を持たせる
  - 一般的なモデルでは仲介人だけでなくプリンシパルの検索も考慮しなければならない

→このような複雑な事情により，全く異なる結果が得られる可能性がある.