”A random bidding and supply land use equilibrium model.”

Martínez, Francisco J., and Rodrigo Henríquez.
Transportation Research Part B: Methodological 41.6 (2007): 632-651.

D2 Risa Kobayashi

2021/06/11 夏学期ゼミ＃ 16

目次

目次

背景

土地市場の複雑さ：非線形問題・相互依存性・多様な主体・不動産物件は差別化された商品・生産コストが規模の経済の影響を受ける・市場に対する外生的な規制がある

土地市場と Random Bidding Model (RBM) の仮定 (Martinez,2000)

- 土地は準-唯一な財であり，売買はオークション型の市場で行われている
- 不動産オプションは離散的で区別されたユニットであり，立地ゾーンと建物タイプによって定義されている
- 最高入札額を入札した人に土地が分配される
- 家計と企業は不動産オプションを求めて入札を行う
- 立地の選択によって，住民にとっては近隣の質，非-住民にとっては集積の経済が決まるため，消費者の入札は相互依存の関係にある
- 供給側は，価格と従前のストックを基にしたゾーンと建物タイプによって供給ユニット数を予測する時系列決定論的なモデルによって表される
- 静的な枠組みにおいて全ての消費者が立地を決めた時，均衡に達する

背景と目的

「ランダム付け値モデル (RBM)」の特徴：[1]
➡ 土地の価格は競争市場＋最高入札者ルールに基づいたオークションメカニズムによって内生的に決定

研究のコア

ランダム付け値モデルを拡張したRandom Bidding and Supply Model (RB&SM) の提案
……競争的市場に対する供給側の行動にランダムネスを導入

- 生じる課題
  - 提案モデルは価格や賃料の相対値を予測 →絶対値を求める方法も同時に提案
  - 土地開発規制の考慮 → 供給側モデルに線形の制約条件 を課す
  - 複雑な均衡モデル → 解法アルゴリズムの開発

[1]解法アルゴリズム MUSSA としてサンティアゴ市に適用．UrbanSim など土地利用-交通モデルの一種

Random Bidding and Supply Model (RB&SM)

Random Bidding and Supply Model の特徴

- 全てのエージェントの行動に一貫性がある[2]
  ……需要側も供給側もミクロ経済的な最適行動[3]に基づく
- 土地利用システムは静学的部分均衡にある
  ……輸送コストは外生的なため「部分」均衡を仮定
  - 都市発展の予測には需要と供給が一致している仮定は不自然でない[4]
  - クローズドフォームで効率的な計算が可能
  - 価格形成について一貫した形で定義可能

---

[2]従前の供給側の行動は計量経済学的に" 前期の余剰に反応する" として定式化されていた
[3]後述の通りロジットモデル
[4]一方．均衡という概念に無理があるとしてエージェントベースモデルなど動学的不均衡を仮定した土地利用-交通モデルのフレームワークも多い．土地利用–交通モデルの需給一致 (Market Clearing) 問題において準-動学均衡を仮定した土地利用モデルも提案されている (Hurtubia, Martinez, Bierlaire, 2019)

目次

前提「土地市場と付け値地代理論」　1/2

土地市場は建物や立地属性のユニークさが財を差別化＝「不完全競争市場」

原因：生産プロセスでは再現できない周辺環境によって都市の立地が評価される

➡市場はオークション的 に振る舞う

Alonso(1964) の都市経済理論：
土地に対する主体の支払い意思額 (WP)=付け値を介して都市構造が決定

最高の付け値を示した主体がその土地を所有[5]し，値を結ぶ包絡線 =「付け値地代曲線」

消費者の行動は「入札関数」でモデル化される

入札関数には立地外部性が含まれる

立地外部性：消費者間の相互作用を表す属性，市場の不完全性をもたらす

[5]第一位価格オークションに基づく，という言い方になるかも

前提「主体行動への仮定」2/2

主体の行動：ランダム効用理論に基づく[6]

消費者：「付け値関数に基づき最良の場所を選ぶ」
供給者：「利益関数に基づき最良のオファーを選ぶ」

選択肢集合の集計単位

消費者：社会経済的属性に応じたクラス $h = (1, \dots, \bar{h})$
不動産の供給：立地場所もしくはゾーン $i = (1, \dots, \bar{i})$，不動産タイプ $v = (1, \dots, \bar{v})$

[6] Ellickson(1981), Martinez(1982),Anas(1982) を適用

The auction model：入札関数の定義

仮定するオークション市場においては，入札関数 = 支払い関数であるので，間接効用関数の逆行列から間接効用関数 V と不動産入札額 B を定義：

$$B_{hvi} = I_h - V_h^{-1}(z_{vi}, P, U_h, \beta_h)$$

I_h：消費者クラス h の家計
P：財の価格ベクトル
β_h：効用の説明変数パラメータ
$z_{v,i}$：不動産タイプ v とゾーン i に基づく属性ベクトル

➡最高入札額の場所＝最大効用 or 最大余剰を得られる場所となり，オークションの結果は効用最大理論に基づく行動と一致する配分となる

- 価格 P と説明変数パラメータ β_h を外生変数とすることで均衡に達する
- 消費者効用関数は準線形で一つの財 x_0 に対してのみ線形 $U_h(x, z) = \alpha_0 x_0 + U_h(x_{-0}, z)$

The auction model：入札関数の定義

B は次のように書き換えられ，式1の通り整理される

$$B_{hvi} = I_h - f(U_h) - g(z_{vi})$$

入札関数

$$B_{hvi} = b^1_h + b^2_{hvi}((P_{\cdot/\cdot i})_{hv}, (S_{\cdot i})_v) + b^3 \tag{1}$$

- b^1_h：$b^1_h = I_h - f(U_h) - b^3$，均衡に達するための効用調整項
- b^2_{hvi}：$g(z_{vi})$ として定義，物件属性の評価を表し 2 つの内生変数を持つ
  - $(P_{\cdot/\cdot i})_{hv}$：属性（主体の社会経済的特性で決まる近隣の質など）の確率ベクトル
  - $(S_{\cdot i})_v$：ゾーンと物件タイプごとの利用可能な建物ストック
- b^3：定数項，市場全体の入札額を絶対的な値に調整

The auction model：立地確率

入札はランダム変数を含むとし $\tilde{B}_{hvi} = B_{hvi} + \varepsilon_{hvi}$，多項ロジットで表す
タイプ h の $\bar{H}_h$[7]人の主体が (v, i) において最高入札者になる確率：

$$P_{h/vi} = \frac{\bar{H}_h \exp(\mu B_{hvi})}{\sum_g \bar{H}_g \exp(\mu B_{gvi})} \tag{2}$$

式1で置き換えると

$$P_{h/vi} = \frac{\bar{H}_h \exp(\mu(b^1_h + b^2_{hvi}((P_{\cdot/\cdot i})_{hv}, (S_{\cdot i})_v)))}{\sum_g \bar{H}_g \exp(\mu(b^1_h + b^2_{gvi}((P_{\cdot/\cdot i})_{gv}, (S_{\cdot i})_v)))} \tag{3}$$

不動点は

$$P_{h/vi} = P_{h/vi}((b^1_\cdot)_h, (P_{\cdot/\cdot i})_{hv}, (S_{\cdot i})_v) \quad \forall h, v, i \tag{4}$$

[7] 上付線の変数，ex.$\bar{H}$ はハイパーパラメータ

The auction model：賃料の定義

賃料：最高入札額の期待値によって決まる

$$r_{vi} = \frac{1}{\mu} \ln \left(\sum \bar{H}_g \exp\left(\mu B_{gvi}\right) \right) + \frac{\gamma}{\mu} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} r_{vi} &= \frac{1}{\mu} \ln \left(\sum \bar{H}_g \exp(\mu(b_g^1 + b_{gvi}^2)) \right) + b^3 + \frac{\gamma}{\mu} \\ &= \bar{r}_{vi} + b^3 \end{aligned} \tag{6}$$

- 式 (6) は，ヘドニック関数[8]
- 消費者と供給者の行動に対する制約に整合するように集約している点で異なる

[8] 各属性に対する消費者の平均的な評価を推定する

Supply model：前提

- 不動産供給者：「最大の利益をもたらす建物とゾーンの組み合わせ (v, i) を選択」
- 利益関数：家賃収入 r_{vi} と生産コスト c_{vi} の差
  生産コスト＝土地代，建設費，維持費

販売ユニット S_{vi} を売ることで得られる総利益は以下の通り

$$\pi_{vi} = S_{vi}(r_{vi} - c_{vi})$$

ここで理論的に考慮したい 2 つの要素

- 異質性
  - ゾーン間での利益の異質性が存在する
  - 供給者の異質性が存在する

  ➡供給者のクラスター $j = (1, \ldots, \bar{j})$ ごとに異なる利潤関数が存在すると仮定
- 利益の集約レベル
  規模の経済が存在する場合，各供給者 j が各下位市場で独立して利益を最大化
  ➡コスト $c_{vij} = c_j((S_{\ldots})_{vij})$ と S_{vij} を定義する必要

Supply model：利潤最大化問題

供給者のクラスター j の利潤最大化行動を，以下の目的関数を最大化する S_{vij} を求める最適化問題として定式化：

$$
\begin{aligned}
\max_{S_{vij}} \quad & \pi_j = \sum_{vi} S_{vij}(r_{vi}((S_{\dots})_{vij}) - c_j((S_{\dots})_{vij})) & \\
\text{s.a.} \quad & S_{vij} \in (R_i, T_{vij}) & \forall v, i, j \\
& \sum_{vi} S_{vij} = S_j & \forall j
\end{aligned} \tag{7}
$$

R_i：ゾーン i における規制[9]の集合
T_{vij}：ゾーン i，建物タイプ v，供給者 j ごとの技術的制約

賃料 r_{vi} は式 (5)(6) で与えられる確率的な値

[9]都市計画による土地利用規制

Supply model：利潤最大化問題と不動点

式 (7) の最適値 S^*_{vij} が供給者 j ごとの供給数 S_{vij} の期待値となる[10]：

$$S^*_{vij} = SP_{vij} = S\frac{\exp\lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)}{\sum_{v'i'j'}\exp\lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)} \qquad (8)$$

P_{vij}：供給者 j にとって物件 vi が業界内で最大利益となる MNL 確率

λ：供給変数の分散，$\lambda\to\infty$ の時決定論的に，$\lambda\to 0$ の時，$S_{vij} = 1/S$ に近づく

S：総供給数

ρ_j：市場シェア S_j の調整パラメータ

$\tilde{\pi}_{vij}$：調整利益（後述）

利益 π と市場シェア調整パラメータ ρ は，賃料 r の場所に関する外部性や生産コスト c の規模の経済を介して供給に依存する

$$\text{Supply fixed point} \quad S_{vi} = S \cdot P_{vi}((b^1_{\cdot})_h, (P_{\cdot/..})_{hvi}, (S_{..})_{vi}) \qquad (9)$$

[10] 問題 (7) から (8) が導き出される過程は Appendix.A を参照

Supply model：レギュレーション R, T の定義

規制 R と供給量 S の関係式は線形：

$$\sum_v a_{vi}^k S_{vi} \le R_i^k$$

- a_{vi}^k：k 番目の規制に関する係数，外生パラメータ
- R_i：ゾーン i における規制であり外生パラメータ

供給者は K_i 個の規制のもとで利益を最大化
供給者の最適行動関数：

$$\tilde{\pi}_{vij} = \pi_{vij} + \pi'_{vij} - \sum_{k \in [1,\ldots,K_i]} \gamma^k a_{vi}^k \qquad \pi'_{vij} = \sum_{v'i'} S_{v'i'j'} \frac{\partial \pi_{v'i'j'}}{\partial S_{vij}}$$

- π'_{vij}：供給者の行動調整項
- γ：ラグランジュ係数，非負

Supply model：レギュレーションの定義

各ゾーンについて実際の規制を $\bar{k}$ とすると以下が成り立つ

- $\gamma_i^k = 0, \quad \forall (k \neq \bar{k} \in K_i); \qquad \gamma_i^{\bar{k}} = \gamma_i \geq 0; \qquad \text{and } \gamma_i a_{vi}^{\bar{k}} = \sum_{k_i \in K} \gamma_i^{k_i} a_{vi}^k$
- $\gamma_i = \max_{k \in K_i} \gamma_i^k$：各ゾーンにおける最大値が拘束パラメータとなる
- $\sum_v a_{vi}^k S_{vi}(\gamma_i) < R_i^k \quad \forall k \neq \bar{k}$

最終的な供給者の行動関数：

$$\tilde{\pi}_{vij} = \pi_{vij} + \pi'_{vij} - \gamma_i a^{\bar{k}_{vi}}$$

拘束パラメータ $\gamma_i^{\bar{k}}$ は以下の不動点解となる

$$\begin{aligned}
\text{Regulation fixed point} \quad \gamma_i^{\bar{k}} &= \frac{1}{\lambda a_{0i}^{\bar{k}}} \ln \left[\frac{S}{R_i^{\bar{k}}} \sum_{vj} a_{vi}^{\bar{k}} \exp \lambda(\pi_{vij} + \pi'_{vij} - \gamma_i^{\bar{k}}(a_{vi}^{\bar{k}} - a_{0i}^{\bar{k}}) - \rho - \hat{\pi}_j) \right] \\
\text{with} \quad \hat{\pi}_j &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[\sum_{v'i'j'} \exp \lambda(\pi_{v'i'j'} + \pi'_{v'i'j'} - \rho'_j - \gamma_{i'}^{\bar{k}} a_{v'i'}^{\bar{k}}) \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Equilibrium

土地市場の場合需要は満たされているが供給が足りないという状況が起きるため
均衡条件：

$$\sum_{vi} S_{vi} P_{h/vi} \geq \bar{H}_h \quad \forall h \tag{11}$$

等式条件：

$$b_h^1 = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{\bar{H}_h} \sum_{vi} S_{vi} \exp(\mu(b_{hvi}^2 - \bar{r}_{vi})) \right) \quad \forall h \tag{12}$$

最適賃料 $\bar{r}_{vi}$ ：

$$\text{Equilibrium fixed point} \quad b_h^1 = b_h((b_\cdot^1)_h, (P_{\cdot/\cdot\cdot})_{hvi}, (S_{\cdot\cdot})_{vi}) \tag{13}$$

b^1 ：効用レベルを調整して均衡を達成する調整項，式 (12) の均衡式を解くことで求められる．b^1 は $\bar{H}_h$ とともに増加し供給が多いほど需要が高いため，効用は人口とともに減少する．この b^1 という指数が，補償の変動を表している．

絶対賃料：b^3 を求める

パラメータ b^3 の役割：定数項，市場全体の入札額を絶対的な値に調整

- b^3 を求める方法 1：総供給量 S が賃料の絶対値 r[11] と外部変数 X で決まると仮定

$$S = S(r, X), \quad r = f(r_{vi}, \ \forall v, i) \tag{14}$$

式 (14) をキャリブレーション →S= エージェントの総人口　となる

- b^3 を求める方法 2：農業地帯 m の価格 r_m との関係を定義

$$r_m = \bar{r}_m + b^3 \tag{15}$$

$\bar{r}_m$：式 (6) を評価して与えられる m の評価値

どちらの方法でも b^3：

$$b^3 = b^3(b^1_h, \ P_{h/vi}, \ S_{vi}) \tag{16}$$

[11] 家賃の集計値，平均家賃や最大家賃を代入

絶対賃料：b^3 を求める

- 賃料は消費者の所得制限 (式 17) を満たす

$$(Px)_{hvi} + r_{vi} \leq I_h \quad \forall \text{ located at (v,i)} \tag{17}$$

x：消費財ベクトル
P：財に対応する価格ベクトル

-
- オークションが最大の価値を引き出すならば式 (17) の右辺と左辺は等しい[12]

$$(Px)_{hvi} = I_h - \bar{r}_{vi} + b^3 \tag{18}$$

  - 式 (18) から，立地やクラスターによって差別化された財の消費レベルを推定可能になる
  - 2 つの立地の間の賃料の差が財への支出の差を引き起こすことを示している

[12] $(Px)_{hvi} = I_h - \bar{r}_{vi} - b^3$ のような気がする

目次

システム方程式

静的均衡は以下の式の同時解であり，多点の不動点問題として表すことができる．

$$
\begin{aligned}
P_{h/vi} &= P_{h/vi}((b^1_\cdot)_h, (P_{\cdot/\cdot i})_{hv}, (S_{\cdot i})_v, \gamma_i) \quad \forall h, v, i \quad \text{Location Fixed Point, 式 (4)} \\
S_{vi} &= S \cdot P_{vi}((b^1_\cdot), (P_{h/vi})_{hvi}, (S_{\cdot\cdot})_{vi}, (\gamma_\cdot)_i) \quad \forall v, i \quad \text{Supply Fixed Point, 式 (9)} \\
b^1_h &= b_h((b^1_\cdot)_h, (P_{\cdot/\cdot\cdot})_{hvi}, (S_{\cdot\cdot})_{vi}, (\gamma_\cdot)_i) \quad \forall h \quad \text{Equilibrium Fixed Point, 式 (12)} \\
\gamma_i &= \gamma_i((b^1_\cdot)_h, (P_{\cdot/\cdot\cdot})_{hvi}, (\gamma_\cdot)_i) \quad \forall i \quad \text{Regulation Fixed Point, 式 (10)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

式 (19) は次元数 $(\#h+1)(\#v\#i)+(\#h)+(\#i)$ の非線形方程式系
入札と賃料の絶対値の関係を表す式 (20) で補完されている．

$$
b^3 = b^3((b^1_\cdot)_h, (P_{\cdot/\cdot\cdot})_{hvi}, (S_{\cdot\cdot})_{vi}, (\gamma_\cdot)_i) \tag{20}
$$

解ベクトルは$(b^1, P, S, \gamma, b^3)^*$
解から入札額，立地パターン，賃料，利益を計算可能

不動点の性質

条件つきで大局的な唯一解への収束が保証（詳細は Appendix B）

- 式 (4)：特定の条件 $-\frac{1}{\mu\Delta b_{hvi}^2} < P_{h/vi} = \frac{H_{hvi}}{S_{vi}} < \frac{1}{\mu\Delta b_{hvi}^2}$[13]のもとで一意に定まる
- 式 (9)：特定の条件 $\frac{-1}{\lambda\Delta r'_{vi}} < P_{vi} < \frac{1}{\lambda\Delta r'_{vi}}$ のもとで一意に定まる
- 式 (12) と式 (10)：一意に定まる

式 (4) の条件：入札額のガンベル分布スケールパラメータ μ，入札変数 b^2 に依存
式 (9) の条件：供給の分散 λ，賃料変数 r に依存
注意：入札変数と賃料変数はアルゴリズムの計算によって求められるので，境界条件は変動している

[13] $H_{hvi} = P_{hvi}SP_{vi}$，$S_{vi} = SP_{vi}$

解法アルゴリズム

1. ベクトルを定義する
   $x = (x_j,\ j \in (1,2,3,4)$, $x_1 = (b_h^1,\ \forall h)$, $x_2 = (P_{h/vi}\ \forall hvi)$, $x_3 = (S_{vi},\ \forall vi)$, $x_4 = (\gamma_i,\ \forall i)$
2. 規制の集合が実現可能であることを保証し，内部の点を見つける
3. 初期化 $n = 0, m = 0$
4. システム方程式の繰り返し
   4.1 $n = n + 1, t = 1, j = 1$ とする
   4.2 $j = 4$ の時すなわち $m = 0$, $x_4 = 0$ の時，$m = 1$ として”Binding” の手順へ
   4.3 $j = 2, 3$ の時”Bound” の手順へ
   4.4 $x^t = (x_j(x_j^{t-1},\ x_k = \bar{x}_k\ \ \forall k \neq j)$, $\bar{x}_k\ \ \forall k \neq j)$ と x^t を更新
   4.5 $|x_{jl}^t - x_{jl}^{t-1}| > e_j\ \ \forall l, t$ であれば $t = t + 1$ として 4.2 へ
   4.6 $\Delta x_j = x_j^t - \bar{x}_j$, $\bar{x}_j = x_j^t$ とする
   4.7 $j < 4, t = 1$ であれば，$j = j + 1$ として 4.2 へ
5. 大局的収束
   5.1 $\Delta x = (|x_j(\bar{x}_j,\ \forall j) - \bar{x}_j| > e_j,\ \forall j)$ であれば 4.1 へ
   5.2 $m = 1$ が止まるならば，$x* = (\bar{x}_j,\ \forall j)$ を出力し，$n = 0, m = m + 1$ として 4.1 へ

解法アルゴリズム（続き）

- Bound の手順
  1. 上限 $f_U = f_U(\theta;\ x^{t-1})$，下限 $f_L = f_L(\theta;\ x^{t-1})$ を計算
  2. $f_L < x_j^{t-1} > f_U$ が 4.4 に行くならば停止し" 収束なし" と出力
- Binding の手順
  1. 初期値 $\gamma^0 = \{\gamma_i^k,\ \ \forall i, k\}$ を定める
  2. 制約条件の評価

$$\Delta_i = \min_{k \in K_i}(R_i^k),\ \ k_i = \arg\min_{k \in K_i}(R_i^k - \sum_{v'}(a_{v'i}^k S_{v'i})),\ \ \bar{\gamma}_i = (\gamma_k \forall i)$$

  3. $n = 1$ として以下を反復
  4. $\Delta_i \leq 0,$ ならば $\bar{\gamma}_i^n = \gamma_i(\bar{\gamma}^{n-1})\ \ \forall i$
     $\Delta_i \geq 0$ ならば $\bar{\gamma}_i^n = 0\ \ \forall i$
  5. $|\gamma_i^n - \gamma_i^{n-1}| > e\ \ \forall i$ ならば $n = n + 1$ として Binding の手順 4 に戻る

最終的なパラメータは $\gamma^* = \{\gamma_i^k = \gamma_i^n,\ \ \forall i, k\}$

解法アルゴリズム：解説

- 4 つの変数ベクトル x_j のそれぞれ対応する不動点方程式を収束するまで順次解く
  → それぞれの方程式内で局所的反復計算
  → 他の変数 x_{-j} を現在の値に固定して変数の評価を繰り返すことで，ベクトルの全ての要素 $x_{ji} \in x_j, \forall i$ について同時に不動点を求めている
- 次の変数ベクトル x_{j+1} を調整，ベクトルの集合全体が調整されるまで反復
- アルゴリズムが実現可能空間の内部に存在する点からスタートした場合，グローバルな解は一意になる

ゾーニング規制がある時：

- アルゴリズム 2 の段階でこれまで課した条件 $S^0_{vi} \geq 0\ \forall v, i$，均衡：$\sum_{vi} S^0_{vi} \geq \sum_h \bar{H}_h$，規制：$\sum_v a^k_{vi} S^0_{vi} \geq R^k_i\ \ \forall i$ を満たす規制可能な範囲を確かめる
- 規制による制約を無視して解を求め $(m = 0)$，制約のある問題 $m = 1$ アルゴリズムを適用する初期値とする
- 不動点 γ を特定して Binding 手順に移り，各ゾーンで最も規制に違反している制約を選択し，規制に合うように利益を調整

シミュレーションテスト：条件

- 不動産の利益 π は業界内で均一，すなわち $\pi_j = \pi \quad \forall j$
- 消費者入札は式 (1) のように加法的関数
- 消費者の選択の依存性 (Dependency) は b^2 項で定義

$$b^2_{hvi} = \alpha_h \sum_{h'v'} Z_{h'} P_{h'/vi} S_{vi} + \beta_h \sum_{v'} Y_{v''i} Y_{v''i} S_{v'i} \tag{21}$$

第一項：一般的な立地属性[14]，$Z_{h'}$ は主体の属性[15]
第二項：建築環境に関する外部性，$Y_{v'i}$ は住宅属性[16]
パラメータの集合 α と β は通常「ヘドニック価格」と呼ばれ，立地や賃料のデータを使ってモデルに対して外生的に与えられる価値

---

[14] ゾーン内の他の世帯の社会経済的特性で決まる近隣の質と，経済活動によって生じる集積外部性の価値など
[15] 世帯の平均所得，地域内の商業施設の数など
[16] 住宅の密度や建物の平均高さなど

シミュレーション内容：
各不動点及び式 (19) の完全均衡集合について，関数形と収束をスタディ
ハイパーパラメータの設定：

- 主体のクラスター $\bar{h} = 4$
- ゾーン数 $\bar{i} = 5$
- 住居タイプ $\bar{v} = 2$

100 人の主体を表のようにクラスタリング

クラスター	主体の数	平均収入（Z_h）
1	10	4 ユニット
2	15	3 ユニット
3	25	2 ユニット
4	50	1 ユニット

シミュレーション：結果

出発点の依存性：	解は出発点に依存しない
収束：	それぞれの関数は 2〜6 回の間で収束
感度分析：	ロバスト性はあるが，スケールパラメータ μ と λ の値が大きいと不安定な解が現れる (スライド p.22 を参照)
効率性：	大規模スケールを想定し 8*103 倍のデータ量でシミュレーションした結果，収束時間は 60 倍にとどまり，実証での有効性を確認

考察：

- スケールパラメータの値が大きくなる＝ all-or-nothing の行動は不安定性が生じる．意味的にはオークションの最高入札者が急激に変化することで，不安定な土地利用となる．
- b^3 のみ異なる複数の解が存在する．
- 外生パラメータが与えられた場合，市場均衡がモデル内で一意である，という意味で独立していると言える．

目次

応用の方法：予測シナリオ

予測シナリオ
外生変数にショックを与え，時間経過に伴う都市発展のシミュレーションを行うこと
外生変数：クラスター別の人口，混雑とインフラの調整を反映した交通費

輸送コストと立地パターン：外性的なアクセス指標を定義し入札関数のゾーン属性を表す．アクセスの優位性評価は入札関数のパラメータによって決定

土地利用と交通の調整の間の時間的な遅れ：前の期間のデータを使うことで対処

モデルの行動パラメータ：住宅と企業の立地，観測データ[17]に対してフィッティング

フィッティング方法：入札確率関数 Eq.(3) と供給確率関数 Eq.(8) に最尤法を適用

➡式 (21) の α, β を推定，b^2 を計算可能＋各期間で均衡を得るために $b1$ パラメータを計算
➡利益関数のパラメータを調整可能
➡規制関数のパラメータ γ も推定可能

[17]不動産供給や賃料などのデータ

応用の方法: 予測シナリオ（続き）

提案モデルのシステムが依存する以下の関数のパラメータを同時にキャリブレーション

- 需要：入札確率関数 Eq(3)
- 供給：供給確率関数 Eq(8)
- 家賃関数 Eq(6) –入札額の影響を受け供給に影響を与える

手順：

- 将来シナリオで変化する制約条件パラメータ (均衡条件とゾーニング規制) を内生的に更新
- 主体の立地問題と不動産物件の供給問題を更新，総需要量から内生的に総供給量が決定

時間推移の組み込み方

- ストックの変化：再開発確率を定義し供給側モデルを推定
- 出転入：クラスター移動者数を推定する確率を定義

➡転入者と新規人口，空き家と新築ストックという各市場の下位集合に対して均衡を適用

目次

結論

成果

供給者の行動の特異性を組み込んだ土地市場の均衡モデルを構築

提案モデルの利点

- 複雑ではあるが効率的な不動点アルゴリズムによって求解可能
- 規模の経済とゾーン経済の両者を記述可能であり，規制の経済的影響及び地価への効果を測定可能

シミュレーションの結果

- アルゴリズムの出発点に依存することなく一意の解に収束
  ただし，スケールパラメータが大きくなるほど解の不安定性が増す
- 選択行動の分散が大きくなると確率的アプローチは均衡問題に凸性をもたらし安定した唯一解を得ることができる．

目次

Appendix: 補足

供給者が個人の利益を最大化する時，情報の不完全性を考慮してエントロピー項（目的関数の第二項）を導入することで利益 π を確率変数として扱っている

利益最大化問題：

$$
\begin{array}{lll}
\max_{vi} & \pi_j = \sum_{vi} S_{vij}\pi_{vij} - \frac{1}{\lambda} S_{vij}(\ln S_{vij} - 1) & \forall j \\
\text{s.t.} & \sum_{v \in V} a_{vi}^k S_{vi} \leq R_i^k & \forall k \in (1, \dots K_i), \quad i \in (1, \dots, I) \\
 & \sum_{vi} S_{vij} = S_j & \forall j \in (1, \dots, J) \\
 & \sum_{vij} S_{vij} = S &
\end{array} \tag{22}
$$

最適化問題として解く

Appendix: 補足

ラグランジュ関数：

$$L = \sum_{vi} S_{vij}\pi_{vij} - \frac{1}{\lambda}(\ln S_{vij} - 1) - \sum_{ki} \gamma_i^k (\sum_{v} a_{vi}^k S_{vi} - R_i^k) - \sum_{j} \rho_j (\sum_{vj} S_{vij} - S_j) - \alpha(\sum_{vi} S_{vi} - S) \quad (23)$$

γ, α, ρ は未定乗数

一階条件：

$$\frac{\partial L}{\partial S_{blm}} = \pi_{blm} + \sum_{vi} S_{vij} \frac{\partial \pi_{vij}}{\partial S_{blm}} - \frac{1}{\lambda} \ln S_{blm} - \sum_{k} \gamma_l^k a_{bl}^k - \rho - \alpha \quad (24)$$

式 (24) を 0 にする S_{vij} が最適な供給量となる.

$$\begin{aligned} S_{vij}^* &= \exp \lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j - \alpha) \\ \tilde{\pi}_{vij} &= \pi_{blm} + \sum_{vi} S_{vij} \frac{\partial \pi_{vij}}{\partial S_{blm}} \sum_{k} \gamma_l^k a_{bl}^k \end{aligned} \quad (25)$$

Appendix: 補足

式 (22) から未定乗数 α と ρ の関係式が導き出される．α は市場規模パラメータ，ρ は市場シェアパラメータ

$$\exp(-\lambda\alpha) = S[\sum_{vij} \exp\lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)]^{-1} \tag{26}$$

$$\exp(-\lambda\rho_j) = S_j[\sum_{vi} \exp\lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \alpha)]^{-1} \tag{27}$$

より，

$$S^*_{vij} = S\frac{\exp\lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)}{\sum_{v'i'j'} \exp\lambda(\tilde{\pi}_{v'i'j'} - \rho_{j'})} = SP_{vij} \tag{28}$$

となり，式 (8) に一致する．

Appendix: 補足

規制がない場合は $\gamma_i^k = 0$ となり，拘束パラメータは式 (22) の制約条件の第一式を等式で満たしており，式 (25) を定数 $\bar{k}$ に置き換えると $\sum_{vj} a_{vi}^k \exp \lambda(\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j - \alpha) = R_i^{\bar{k}}$ となり，展開するとパラメータ γ を求める式となる．

$$\sum_{vj} a_{vi}^k \exp \lambda(\pi_{vij} + \pi_j' - \rho_j - \alpha) \exp(-\lambda \gamma_i^{\bar{k}} a_{vi}^{\bar{k}}) = R^{\bar{k}}{}_i \tag{29}$$

ただしパラメータ γ は a がかかってしまっているので直接求めることができない．

本研究では式 (27) に $\exp(\lambda \gamma_i^{\bar{k}} a_{0i}^{\bar{k}})$ をかけることで対処する[18]

[18] $a_{0i}^{\bar{k}}$ はベクトル $(a_{vi}^{\bar{k}})v$ からの任意の要素だが $\max_v a_{vi}^{\bar{k}}$ となる $a_{0i}^{\bar{k}}$ が収束の観点から望ましい